

**BIFURKASI PADA MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED
RECOVERED* (SIR) DENGAN WAKTU TUNDA
DAN LAJU PENULARAN BILINEAR**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan guna Memperoleh Gelar
Sarjana Sains



Oleh
Nazilatul Lailiyah
NIM. 10305141011

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2014**

PERSETUJUAN
SKRIPSI DENGAN JUDUL
“BIFURKASI PADA MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED*
***RECOVERED* (SIR) DENGAN WAKTU TUNDA**
DAN LAJU PENULARAN BILINEAR”

Yang disusun oleh:

Nama : Nazilatul Lailiyah

NIM : 10305141011

Prodi : Matematika

Jurusan : Pendidikan Matematika

telah disetujui oleh pembimbing untuk diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi.



Yogyakarta, 23 Juni 2014

Pembimbing

Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si.
NIP.197904062005011005

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nazilatul Lailiyah

NIM : 10305141011

Prodi : Matematika

Jurusan : Pendidikan Matematika

Fakultas : MIPA

Judul TAS : Bifurkasi pada Model *Susceptible Infected Recovered* (SIR)

dengan Waktu Tunda dan Laju Penularan Bilinear

dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri.

Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Yogyakarta, 23 Juni 2014

Yang menyatakan,



Nazilatul Lailiyah
NIM. 10305141011

PENGESAHAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL “BIFURKASI PADA MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED* (SIR) DENGAN WAKTU TUNDA DAN LAJU PENULARAN BILINEAR”

Yang Disusun Oleh:

Nama : Nazilatul Lailiyah
NIM : 10305141011
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 3 Juli 2014
dan dinyatakan lulus.

Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
<u>Kus Prihantoso K., M.Si</u> NIP. 197904062005011005	Ketua Penguji		11/7/14
<u>Husna 'Arifah, M.Sc</u> NIP. 197810152002122001	Sekretaris Penguji		11/7/14
<u>Dr. Hartono</u> NIP. 196203291987021002	Penguji Utama		10/7/14
<u>Fitriana Yuli.S., M.Si</u> NIP. 198407072008012003	Penguji Pendamping		11/7/14

Yogyakarta, Juli 2014

Fakultas Matematika dan

Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

MOTTO

Allah kelak akan memberikan kelapangan sesudah kesempitan

(Qs. Ath Tholaq: 7)

Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu, dan boleh
jadi pula kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu, Allah
mengetahui sedang kamu tidak mengetahui

(Qs. Al Baqarah: 216)

Jika pikiran saya bisa membayangkannya, hati saya bisa meyakinkannya, saya
tahu saya akan mampu menggapainya

(Jesse Jackson)

Kemuliaan paling besar bukanlah karena kita tidak pernah terpuruk, tapi
karena kita selalu mampu bangkit setelah terjatuh

(Oliver Goldsmith)

Waktu lebih berharga daripada uang
Anda bisa meraih uang lebih, tetapi anda tidak bisa meraih tambahan waktu

(Jim Rohn)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk

Kedua orang tuaku, Ibu Solekhah dan Bapak Surawan

untuk semua pengorbanan, kerja keras, doa, dukungan, kasih sayang, nasehat

yang telah diberikan selama ini

Adekku Ifan yang aku sayangi

Mas Sony yang selalu mendoakan dan memberi semangat

Teman-teman seperjuangan Rumi, Meita, Ratna, Candra, Devi, Likhah

untuk pertemanan kita selama ini

untuk perjuangan kita bersama

Sangat bahagia memiliki keluarga dan teman seperti kalian

BIFURKASI PADA MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED* (SIR) DENGAN WAKTU TUNDA DAN LAJU PENULARAN BILINEAR

Oleh
Nazilatul Lailiyah
NIM 10305141011

ABSTRAK

Pada skripsi ini dikaji mengenai model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear. Model ini merupakan model penyebaran penyakit menular yang berbentuk sistem persamaan diferensial tak linear. Pada model SIR ini diasumsikan adanya waktu tunda. Waktu tunda menyatakan waktu inkubasi penularan penyakit.

Tahap menganalisa model SIR meliputi mencari titik-titik ekuilibrium, menganalisa kestabilan titik-titik ekuilibrium, dan menganalisa perubahan waktu tunda terhadap kemungkinan terjadinya bifurkasi. Penentuan kestabilan titik ekuilibrium dilakukan secara lokal dengan melakukan linearisasi terhadap sistem. Penentuan jenis bifurkasi pada model SIR dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear dilakukan dengan metode *center manifold* dengan menggunakan parameter waktu tunda.

Berdasarkan hasil analisa, diperoleh dua titik ekuilibrium bebas penyakit dan satu titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit yang pertama (E_0) tidak stabil, titik ekuilibrium bebas penyakit yang kedua (E_1) stabil asimtotik lokal jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) kurang dari satu dan tidak stabil jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) lebih dari satu. Di lain pihak, titik ekuilibrium endemik (E_+) stabil asimtotik lokal jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) lebih dari satu dan kurang dari sama dengan tiga, sedangkan jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) lebih dari tiga maka titik ekuilibrium endemik mengalami bifurkasi Hopf. Terjadinya bifurkasi Hopf sebagai akibat dari adanya perubahan nilai parameter waktu tunda.

Kata kunci: *model SIR, titik ekuilibrium, kestabilan, bifurkasi Hopf*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul

“BIFURKASI PADA MODEL *SUSCEPTIBLE INFECTED*

***RECOVERED* (SIR) DENGAN WAKTU TUNDA**

DAN LAJU PENULARAN BILINEAR”

ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis mendapat dukungan dan bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberi kemudahan dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika dan Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, saran, kritik, serta kelancaran pelayanan akademik selama masa studi.

4. Bapak Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan arahan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi ini.
5. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
6. Semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, kritik dan saran sangat diharapkan demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi penulis maupun pembaca.

Yogyakarta, 23 Juni 2014

Penulis



Nazilatul Lailiyah
NIM. 10305141011

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR LAMPIRAN	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penulisan	3
D. Manfaat Penulisan	4
BAB II KAJIAN TEORI	
A. Model Matematika	5
B. Model Pertumbuhan Logistik	6
C. Model <i>Susceptible Infected Recovered</i> (SIR)	8
D. Nilai Eigen	10
E. Sistem Dinamik.....	12
F. Titik Ekuilibrium.....	21
G. Linearisasi.....	22
H. Analisa Kestabilan.....	26
I. Sistem Persamaan Diferensial Tundaan	33
J. <i>Basic Reproduction Number</i> (\mathcal{R}_0)	34
K. Bifurkasi Hopf.....	35
L. <i>Center Manifold</i>	38

BAB III PEMBAHASAN

A. Formulasi Model	40
B. Titik Ekuilibrium.....	45
C. <i>Basic Reproduction Number</i> (\mathcal{R}_0)	47
D. Kestabilan Titik Ekuilibrium	48
E. Bifurkasi Hopf.....	67
F. Simulasi Numerik.....	77
G. Interpretasi Solusi.....	81

BAB IV PENUTUP

A. Kesimpulan	83
B. Saran	84

DAFTAR PUSTAKA	85
----------------------	----

LAMPIRAN	87
----------------	----

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Maple Bentuk Sistem \dot{u}	87
Lampiran 2. Program Maple untuk Mencari $\Psi_{0,1,1}, \Psi_{0,1,2}, \Psi_{0,2,1}, \Psi_{0,2,2}, h_{1,11}(0),$ $h_{1,12}(0), h_{1,22}(0), h_{2,11}(0), h_{2,12}(0), h_{2,22}(0), h_{1,11}(-1), h_{1,12}(-1),$ $h_{1,22}(-1), h_{2,11}(-1), h_{2,12}(-1), h_{2,22}(-1)$ saat $\mu < 0$	91
Lampiran 3. Program Maple untuk Mencari $\Psi_{0,1,1}, \Psi_{0,1,2}, \Psi_{0,2,1}, \Psi_{0,2,2}, h_{1,11}(0),$ $h_{1,12}(0), h_{1,22}(0), h_{2,11}(0), h_{2,12}(0), h_{2,22}(0), h_{1,11}(-1), h_{1,12}(-1),$ $h_{1,22}(-1), h_{2,11}(-1), h_{2,12}(-1), h_{2,22}(-1)$ saat $\mu > 0$	96
Lampiran 4. Program Maple untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ saat $\tau < \tau_0$ dan $\tau > \tau_0$	101
Lampiran 5. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit $E_1 =$ $(1,0,0)$ untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	111
Lampiran 6. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$	112
Lampiran 7. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ saat $\tau < \tau_0$	113
Lampiran 8. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ saat $\tau > \tau_0$	114

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Proses Pemodelan Matematika.....	5
Gambar 2. Diagram Transfer Model SIR Kermack dan Mckendrik	9
Gambar 3. Ilustrasi Kestabilan	27
Gambar 4. Solusi \dot{r} jika $a > 0$	37
Gambar 5. Solusi \dot{r} jika $a < 0$	37
Gambar 6. Diagram Transfer Model <i>Susceptible Infected Recovered</i> (SIR) dengan Laju Penularan Bilinear	41
Gambar 7. Solusi Sistem saat $\mu < 0$	76
Gambar 8. Solusi Sistem saat $\mu > 0$	76
Gambar 9. Simulasi Sistem (3.11) untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ dengan Nilai Awal (0,2, 0,3, 0,1 dan $\tau=2,5$	78
Gambar 10. Simulasi Sistem (3.11) untuk $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$ dengan Nilai Awal (0,2, 0,3, 0,2) dan $\tau = 2,5$	79
Gambar 11. Simulasi Sistem (3.11) untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ dengan Nilai Awal (0,25, 0,04, 0,2) dan $\tau = 1,2$	80
Gambar 12. Simulasi Sistem (3.11) untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ dengan Nilai Awal (0,2, 0,3, 0,1) dan $\tau = 2,5$	81

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) merupakan model dinamis dari penyebaran suatu penyakit menular. Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 dan selanjutnya dikembangkan oleh banyak ahli. Dalam model SIR, populasi dibagi menjadi 3 kelas, yaitu *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Kelas S mewakili kelompok individu yang sehat dan dapat terinfeksi penyakit. Kelompok ini disebut juga sebagai kelompok yang rentan terhadap penyakit. Kelas I mewakili kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh, sedangkan kelas R mewakili kelompok individu yang telah sembuh dan kebal terhadap penyakit. Model ini berbentuk sistem persamaan diferensial tak linear.

Salah satu faktor yang mempengaruhi model SIR adalah adanya laju penularan penyakit. Laju penularan yang sering digunakan pada model SIR merupakan laju penularan bilinear. Laju penularan ini berbentuk βSI dengan β adalah laju kontak antara kelas *Susceptible* (S) dan kelas *Infected* (I). Model SIR dengan laju penularan bilinear telah diteliti oleh banyak ahli, diantaranya Kermack dan McKendrick (1927), Wanbiao Ma, Mei Song, dan Y. Takeuchi (2004), Roman Ullah, dkk (2013).

Dalam penelitian Kermack dan McKendrick (1927), model SIR yang dibentuk menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut tidak terjadi kelahiran dan kematian pada populasi, penularan penyakit melalui kontak langsung

dengan individu yang terinfeksi penyakit, dan individu yang telah sembuh tidak akan terinfeksi penyakit lagi. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) < 1 maka penyakit akan hilang, sedangkan jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) > 1 maka penyakit akan tetap ada pada daerah penyebaran penyakit. Pada penelitian Wanbiao Ma, Mei Song, dan Y. Takeuchi (2004) ditunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik global jika banyaknya individu rentan pada titik ekuilibrium bebas penyakit (S_0) tidak melebihi individu rentan pada titik ekuilibrium endemik (S^*). Pada penelitian Wanbiao Ma, Mei Song, dan Y. Takeuchi (2004) ditambahkan variabel adanya masa inkubasi. Pembentukan model SIR yang dilakukan Roman Ullah, dkk (2013) menggunakan asumsi yang sama dengan asumsi yang dipakai oleh Kermack dan Mckendrick (1927). Namun, pada model ini ditambahkan variabel adanya kelahiran dan kematian pada populasi. Jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) ≤ 1 maka titik ekuilibrium bebas penyakit merupakan titik yang stabil asimtotik global sedangkan jika *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) > 1 maka titik ekuilibrium endemik bersifat stabil asimtotik global.

Penyakit menular seperti campak, malaria, dan TBC memiliki masa inkubasi yaitu interval antara masuknya bibit penyakit ke dalam tubuh manusia sampai dengan pertama kali menunjukkan gejala penyakit atau dapat menularkan penyakit ke individu rentan (Wahyudin Rajab, 2008: 146). Masa inkubasi muncul pada model SIR dalam bentuk waktu tunda. Waktu tunda dapat mengakibatkan perubahan perilaku dinamik sistem. Sehingga

dimungkinkan terjadinya bifurkasi pada model SIR. Bifurkasi merupakan munculnya potret fase yang tidak ekuivalen secara topologi akibat perubahan nilai parameter (Kuznetsov, 1998: 57). Berdasarkan hal-hal tersebut maka pada skripsi ini akan dianalisis mengenai bifurkasi yang terjadi pada model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan tersebut maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kestabilan titik-titik ekuilibrium dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear?
2. Jenis bifurkasi apa yang terjadi pada model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear?

C. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan yang telah diuraikan tersebut maka tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis kestabilan titik-titik ekuilibrium dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear.
2. Menganalisis jenis bifurkasi apa yang terjadi pada model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

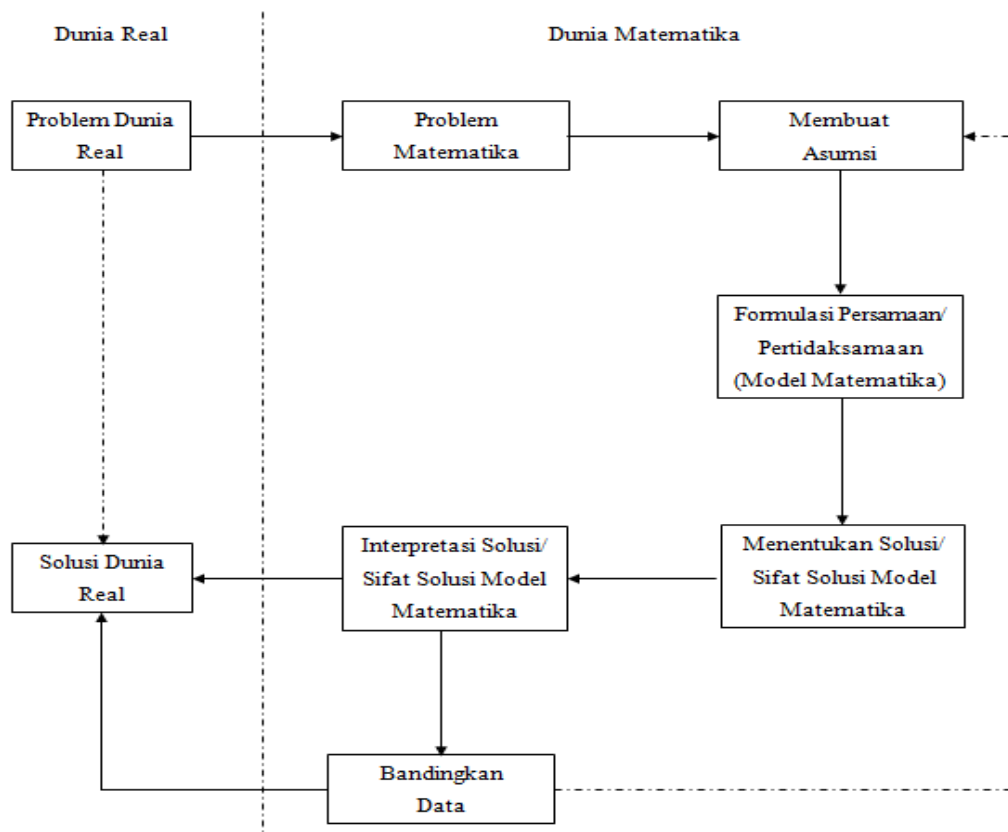
1. Mengetahui kestabilan titik-titik ekuilibrium dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear.
2. Mengetahui jenis bifurkasi yang terjadi pada model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear.

BAB II KAJIAN TEORI

A. Model Matematika

Menurut Widowati dan Sutimin (2007: 1), model matematika adalah representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan proses mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem dunia real dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real ini menjadi lebih tepat.

Menurut Widowati dan Sutimin (2007: 3), proses pemodelan matematika dapat dinyatakan dalam alur diagram pada Gambar 1.



Gambar 1. Proses Pemodelan Matematika

Penyelesaian problem dunia real secara langsung kadang sulit didapatkan, untuk mempermudah mencari penyelesaian problem dunia real akan dibawa ke dalam dunia matematika. Dalam dunia matematika, problem diidentifikasi dengan menentukan variabel-variabel problem dan hubungan antara variabel-variabel tersebut. Selanjutnya membuat asumsi-asumsi yang sesuai dengan problem agar model yang dihasilkan nanti dapat menggambarkan dengan tepat problem dalam dunia real tersebut.

Berdasarkan variabel-variabel yang telah ditentukan, hubungan antar variabel, dan asumsi-asumsi yang telah dibuat maka dapat dibentuk persamaan atau pertidaksamaan (model matematika) yang menggambarkan problem dunia real tersebut. Dengan persamaan atau pertidaksamaan yang telah dibentuk maka dapat dicari solusi atau sifat solusi model matematika. Pada langkah berikutnya dilakukan interpretasi terhadap solusi atau sifat solusi model matematika ke dalam dunia real. Pembandingan solusi dengan data yang ada dapat membantu memperbaiki model yang telah dibentuk apakah telah sesuai atau belum, apabila belum sesuai maka dapat meninjau ulang asumsi-asumsi yang telah dibuat.

B. Model Pertumbuhan Logistik

Pada 1846, Pierre Francois Verhuslt menyatakan bahwa pertumbuhan penduduk tidak hanya bergantung pada ukuran populasi tetapi bergantung juga pada daya dukung lingkungan dan sumber daya yang akan membatasi

pertumbuhan populasi. Model pertumbuhan penduduk seperti itu disebut model logistik.

Menurut Blanchard (2012: 9), untuk model pertumbuhan populasi dengan mempertimbangkan lingkungan dan sumber daya yang terbatas diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Jika populasi kecil maka perubahan jumlah populasi sebanding dengan jumlah populasi.
2. Jika populasi besar maka perubahan jumlah populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi tetapi bergantung juga pada daya dukung lingkungan dan sumber daya.

Notasi-notasi yang digunakan dalam model pertumbuhan populasi dengan mempertimbangkan lingkungan dan sumber daya yang terbatas adalah sebagai berikut:

1. $P(t)$ adalah jumlah populasi pada saat t .
2. r adalah tingkat pertumbuhan populasi kecil.
3. K adalah daya dukung lingkungan dan sumber daya (*carrying capacity*).

Dalam pembentukan model pertumbuhan logistik, diasumsikan juga bahwa $P(t)$ akan meningkat jika $P(t) < K$. Dengan demikian, jika $P(t) > K$ maka $P(t)$ akan menurun. Berdasarkan asumsi bahwa jika populasi kecil maka perubahan jumlah populasi sebanding dengan jumlah populasi dapat dinyatakan sebagai berikut jika $P(t)$ kecil maka $\frac{dP}{dt} \approx rP(t)$. Sedangkan jika populasi besar yaitu $P(t) > K$ maka $\frac{dP}{dt} < 0$, $\frac{dP}{dt}$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dP}{dt} = r \times (\text{sesuatu}) \times P(t),$$

untuk $P(t)$ kecil maka ‘sesuatu’ dekat ke satu sedangkan untuk $P(t) > K$ maka ‘sesuatu’ bernilai negatif. Jadi jika $P(t) > K$ maka

$$(\text{sesuatu}) = \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right).$$

Sehingga diperoleh $\frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) P(t)$ yang disebut sebagai persamaan logistik (Blanchard, 2012: 10).

C. Model *Susceptible Infected Recovered* (SIR)

Model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) merupakan model penyebaran penyakit menular. Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrik pada tahun 1927. Dalam model SIR Kermack McKendrik, populasi dibagi menjadi 3 kelas: *Susceptible* yang dinotasikan dengan S yaitu kelompok individu yang sehat dan dapat terinfeksi penyakit (kelompok individu yang rentan), *Infected* yang dinotasikan dengan I yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh, dan *Recovered* yang dinotasikan dengan R yaitu kelompok individu yang sembuh dan kebal terhadap penyakit.

Model SIR yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrik menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Penyebaran penyakit terjadi dalam lingkungan tertutup yaitu tidak terjadi kelahiran dan kematian, tidak terjadi imigrasi dan emigrasi.

2. Penularan penyakit melalui kontak langsung dengan individu yang terinfeksi penyakit.
3. Individu yang telah sembuh tidak akan terinfeksi penyakit lagi atau memiliki kekebalan permanen.

Notasi-notasi yang digunakan Kermack dan McKendrick dalam model SIR yaitu sebagai berikut:

1. $S(t)$ yaitu jumlah individu yang sehat dan dapat terinfeksi penyakit pada saat t .
2. $I(t)$ yaitu jumlah individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh pada saat t .
3. $R(t)$ yaitu jumlah individu yang telah sembuh dan kebal terhadap penyakit pada saat t .
4. β yaitu laju kontak antara kelas *Susceptible* dan *Infected*.
5. γ yaitu laju kesembuhan dari penyakit.

Diagram transfer model SIR Kermack dan McKendrick ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Transfer Model SIR Kermack dan McKendrick

Diagram transfer pada Gambar 2 menunjukkan bahwa penurunan jumlah individu dalam kelas *Susceptible* dikarenakan adanya individu pada kelas *Susceptible* yang terinfeksi penyakit. Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI. \quad (2.1)$$

Peningkatan jumlah individu dalam kelas *Infected* disebabkan adanya individu pada kelas *Susceptible* yang terinfeksi penyakit. Sedangkan penurunan jumlah individu dalam kelas *Infected* dikarenakan adanya individu yang sembuh. Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I. \quad (2.2)$$

Peningkatan jumlah individu dalam kelas *Recovered* dikarenakan adanya individu yang sembuh. Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (2.3)$$

Dari Persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) diperoleh model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) berikut:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ \dot{I}(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) &= \gamma I(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hasil analisis model SIR yang dibentuk Kermack dan Mckendrik, dengan diberikan nilai awal $S(0) = S_0 > 0$ dan $I(0) = I_0 > 0$, diperoleh *basic reproduction number* $(\mathcal{R}_0) = \frac{\beta}{\gamma} S_0$. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka penyakit akan hilang, sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka penyakit akan tetap ada pada daerah penyebaran penyakit.

D. Nilai Eigen

Definisi 2.1 (Howard, 1991: 277)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yakni

$$Ax = \lambda x \quad (2.5)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Selanjutnya untuk mencari nilai-nilai eigen dari matriks A, Persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \Leftrightarrow Ax &= \lambda Ix, \\ \Leftrightarrow Ax - \lambda Ix &= 0, \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I)x &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan I adalah matriks identitas.

Menurut (Howard, 1991: 278) supaya λ menjadi nilai eigen maka harus ada pemecahan tak nol dari Persamaan (2.6), Persamaan (2.6) akan mempunyai pemecahan tak nol jika hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yang disebut sebagai persamaan karakteristik dari A.

Contoh 2.1

Akan dicari nilai-nilai eigen dari matriks A berukuran 3×3 ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari A yaitu

$$\begin{aligned}
&\det(A - \lambda I) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Solusi dari Persamaan (2.7) adalah $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, dan $\lambda = -1$ yang merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A.

E. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang dibentuk oleh persamaan-persamaan diferensial baik persamaan diferensial biasa atau parsial.

Definisi 2.2 (Ross, 1984: 3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Menurut Ross (1984: 4), persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.2

Persamaan-persamaan diferensial biasa ditunjukkan pada persamaan-persamaan berikut:

- a. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1,$
- b. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0,$
- c. $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 3x = 0.$

Persamaan-persamaan diferensial parsial ditunjukkan pada persamaan-persamaan berikut:

- a. $\frac{dy}{ds} + \frac{dy}{dt} = 2,$
- b. $\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = 4,$
- c. $\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2y}{du^2} = 6s.$

Sistem dinamik dipengaruhi oleh perubahan waktu, sistem yang secara implisit bergantung oleh waktu disebut sistem autonomous, sedangkan sistem yang secara eksplisit bergantung terhadap waktu disebut sistem non-autonomous.

Contoh 2.3

Sistem autonomous ditunjukkan pada Sistem (2.8)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -6x_1(t) - 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t),\end{aligned}\tag{2.8}$$

sedangkan sistem non-autonomous ditunjukkan pada Sistem (2.9)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2\cos^2 t x_1(t) - (1 + \sin 2t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= (1 - \sin 2t)x_1(t) - 2\sin^2 t x_2(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Sistem dinamik dibagi menjadi sistem dinamik linear dan sistem dinamik nonlinear.

1. Sistem Dinamik Linear

Sistem dinamik linear ditunjukkan pada Sistem (2.10)

$$\dot{x} = Ax \tag{2.10}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$, A matriks berukuran $n \times n$ dan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

Sebelumnya untuk persamaan diferensial

$$\dot{x} = ax \tag{2.11}$$

dan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$, akan dicari solusi Persamaan

(2.11) yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} &= ax, \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx &= \int a dt, \\ \Leftrightarrow \ln|x| + c_1 &= at + c_2, \\ \Leftrightarrow \ln|x| &= at + c_3, \\ \Leftrightarrow e^{\ln|x|} &= e^{at+c_3}, \\ \Leftrightarrow |x| &= e^{at} e^{c_3}, \\ \Leftrightarrow x &= \pm e^{at} e^{c_3}, \\ \Leftrightarrow x &= e^{at} c, \text{ dengan } c \text{ konstanta tak nol.}\end{aligned}$$

Saat $t = 0$ maka $x(0) = c = x_0$. Jadi solusi dari Persamaan (2.11) adalah

$$x = e^{at} x_0. \quad (2.12)$$

Definisi 2.3 (Howard, 1991: 34)

Jika P matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks Q dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga $PQ = QP = I$, maka P invertible (dapat dibalik) dan Q adalah invers dari P .

Menurut Perko (2001: 6-7), jika nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap i dan $\lambda_i \neq \lambda_j$ untuk $i \neq j$, maka himpunan vektor eigen $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ membentuk basis untuk \mathbb{R}^n dan matriks $P = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$ invertible serta $D = P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n]$.

Selanjutnya dapat dicari solusi dari Sistem (2.10) yang memiliki n nilai eigen berbeda yaitu sebagai berikut:

dimisalkan $x = Py$ dengan $y \in \mathbb{R}^n$ sehingga Sistem (2.10) menjadi

$$\dot{x} = Ax$$

$$\Leftrightarrow P\dot{y} = APy,$$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = P^{-1}APy,$$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = Dy \text{ atau } \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{bmatrix},$$

maka berdasarkan solusi dari Persamaan (2.11) diperoleh

$$y_i = e^{\lambda_i t} y_{0i} \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n. \text{ Maka}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} y_0,$$

karena $x = Py$ maka $y = P^{-1}x$ sehingga $y_0 = P^{-1}x_0$.

Maka

$$x = Py$$

$$\Leftrightarrow x = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} y_0,$$

$$\Leftrightarrow x = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}x_0.$$

Jadi solusi Sistem (2.10) adalah

$$x(t) = PE(t)P^{-1}x_0,$$

dengan $E(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]$.

Berdasarkan solusi dari Persamaan (2.11) maka solusi dari Sistem (2.10)

juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$x = e^{At}x_0,$$

sehingga $e^{At} = PE(t)P^{-1}$.

Macam-macam bentuk e^{At} berdasarkan nilai-nilai eigen dari matriks

A adalah sebagai berikut:

a. Jika nilai-nilai eigennya adalah bilangan real dan berbeda satu sama lain

maka $e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1}$, dengan e^{At} matriks $n \times n$.

b. Jika terdapat n nilai eigen kompleks berbeda $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan $\bar{\lambda}_j = a_j -$

$$ib_j \text{ maka } e^{At} = P \operatorname{diag} \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix} \right\} P^{-1}, \text{ dengan } e^{At}$$

matriks $n \times n$.

c. Jika ada sebanyak k nilai eigen kembar dengan $k < n$ maka

$$e^{At} = P \operatorname{diag} [e^{\lambda_j t}] P^{-1} \left[I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right], \text{ dengan } e^{At} \text{ matriks}$$

$n \times n$, $N = A - S$ adalah nilpotent order k dengan N dan S komutatif yaitu $SN = NS$, dan $S = P \operatorname{diag} [\lambda_j] P^{-1}$.

d. Jika ada sebanyak k nilai eigen kembar dengan $k = n$ maka $e^{At} =$

$$\operatorname{diag} [e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right], \text{ dengan } e^{At} \text{ matriks } n \times n,$$

$N = A - S$ adalah nilpotent order k dengan N dan S komutatif yaitu $SN = NS$, dan $S = \operatorname{diag} [\lambda_j]$.

Matriks N dikatakan nilpotent order k jika $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$ (Perko, 2001: 33).

Contoh 2.4

Contoh matriks nilpotent adalah

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

N tersebut merupakan matriks nilpotent order 2 yaitu ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.5

Diberikan sistem dinamik linear

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Akan dicari solusi Sistem (2.13).

Penyelesaian:

Sistem (2.13) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.\tag{2.14}$$

Dari (2.14) maka diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.\tag{2.15}$$

Selanjutnya akan dicari persamaan karakteristik dari matriks A yaitu

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array} \right] R_2 + 2R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ sehingga } \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Maka diperoleh $x_1 + 2x_2 = 0$, misal $x_2 = t$ maka $x_1 = -2t$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R}.$$

Lalu dipilih $t = 1$. Sehingga diperoleh

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$

$$\left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array} \right] R_2 + 2R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ sehingga } \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Maka diperoleh $4x_1 + 2x_2 = 0$, misal $x_1 = t$ maka $x_2 = -2t$ lalu diambil $t = 1$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R}.$$

Lalu dipilih $t = 1$. Sehingga diperoleh

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Dari vektor eigen v_1 dan v_2 maka diperoleh

$$P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t} \\ -\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} & -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi solusi Sistem (2.13) adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \right) x_{01} + \left(\frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t} \right) x_{02}, \\ x_2 &= \left(-\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} \right) x_{01} + \left(-\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t} \right) x_{02}. \end{aligned}$$

2. Sistem Dinamik Nonlinear

Bentuk sistem dinamik nonlinear ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.16}$$

dengan $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, dan E adalah himpunan terbuka, serta $f \in C^r$ dengan r suatu bilangan positif, dimana C^r adalah fungsi yang selalu kontinu hingga turunan ke- r .

Analisa dari sistem dinamik nonlinear akan lebih mudah dilakukan apabila sistem dinamik nonlinear diubah ke dalam bentuk sistem dinamik linear.

F. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik keseimbangan merupakan solusi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu.

Definisi 2.4 (Perko, 2001: 102)

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\hat{x}) = 0$.

Contoh 2.6

Akan dicari titik ekuilibrium dari Sistem (2.17).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_1(t)x_2(t).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Penyelesaian:

Misal $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ adalah titik ekuilibrium Sistem (2.17) maka

$$\hat{x}_1 - \hat{x}_2^2 = 0,\tag{2.18}$$

$$-\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 = 0.\tag{2.19}$$

Dari Persamaan (2.18) maka diperoleh

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2^2.\tag{2.20}$$

Substitusikan Persamaan (2.20) ke (2.19) sehingga diperoleh

$$-\hat{x}_2 + \hat{x}_2^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\hat{x}_2(1 - \hat{x}_2^2) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_2 = 0 \text{ atau } \hat{x}_2 = \pm 1.$$

Selanjutnya substitusikan $\hat{x}_2 = 0$ ke Persamaan (2.20) sehingga diperoleh

$\hat{x}_1 = 0$, substitusikan $\hat{x}_2 = 1$ dan $\hat{x}_2 = -1$ ke Persamaan (2.20) maka diperoleh $\hat{x}_1 = 1$. Jadi titik ekuilibrium dari Sistem (2.17) adalah $(0,0)^T$, $(1,1)^T$, dan $(1,-1)^T$.

G. Linearisasi

Linearisasi yaitu mengubah sistem nonlinear ke dalam sistem linear.

Definisi 2.5 (Perko, 2001: 102).

Sistem linear $\dot{x} = Ax$ dengan matriks $A = Df(x_0)$ disebut linearisasi dari $\dot{x} = f(x)$ pada x_0 .

Definisi 2.6 (Bartle, 2011: 162)

Misalkan $L \subseteq \mathbb{R}$ adalah interval, fungsi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Bilangan real L dikatakan turunan dari f di c jika diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in I$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon,$$

dalam hal ini dikatakan f diferensiabel di c . Dengan kata lain, turunan f di c adalah

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Teorema 2.1 (Perko, 2001: 67)

Jika $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferensiabel di x_0 maka diferensial parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, n$,

di x_0 ada untuk semua $x \in \mathbb{R}^n$, dan

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= Df(x_0)x.
\end{aligned}$$

$Df(x_0)$ disebut matriks Jacobian dari fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang diferensiabel pada $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $Df(x_0)$ dapat dinotasikan sebagai $Jf(x_0)$.

Contoh 2.7

Akan dicari matriks jacobian dari

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 - x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

pada titik $x_0 = (1, -1)^T$.

Penyelesaian:

Matriks jacobian dari fungsi $f(x)$ adalah

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

maka

$$Df(1, -1) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kestabilan sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik ekuilibrium \hat{x} dapat dilihat dari kestabilan linearisasi sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik ekuilibrium \hat{x} , asalkan titik ekuilibrium \hat{x} hiperbolik (Perko, 2001: 103).

Definisi 2.7 (Perko, 2001: 102).

Titik ekuilibrium \hat{x} disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari $\dot{x} = f(x)$ jika tidak ada nilai eigen dari matriks $Df(\hat{x})$ yang mempunyai bagian real nol.

Akan ditunjukkan proses mengubah sistem dinamik nonlinear ke dalam sistem dinamik linear menggunakan deret Taylor. Misal $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium Sistem (2.16). Deret Taylor dari fungsi f disekitar titik ekuilibrium \hat{x} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_2}, \end{aligned}$$

⋮

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n) + R_{f_n}.
\end{aligned}$$

$R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ nilainya mendekati nol sehingga dapat diabaikan dan karena $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T$ titik ekuilibrium Sistem (2.16) maka $f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T = f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T = \dots = f_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n), \\
\dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n), \\
& \vdots \\
\dot{x}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_2 - \hat{x}_2) + \dots \\
& + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Sistem (2.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \hat{x}_n \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \hat{x}_1, y_2 = x_2 - \hat{x}_2, \dots, y_n = x_n - \hat{x}_n$, maka Sistem (2.22) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Sistem (2.23) merupakan linearisasi Sistem (2.16) dimana diperoleh matriks Jacobian dari Sistem (2.23) yaitu

$$Jf(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \end{bmatrix}.$$

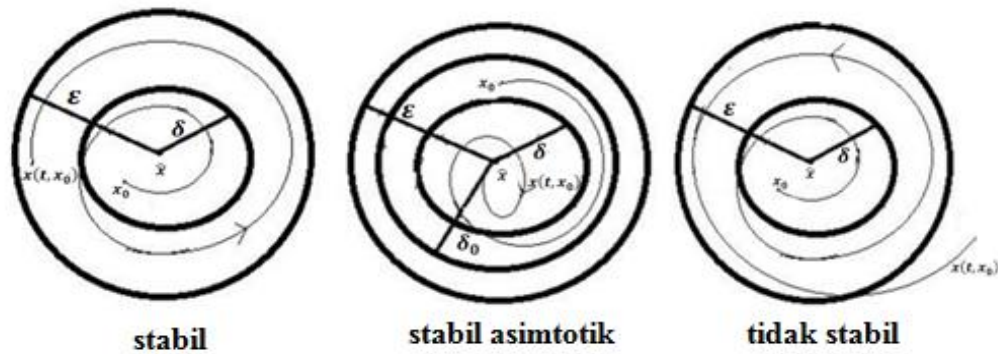
H. Analisa Kestabilan

Definisi 2.8 (Olsder, 2004: 57)

Diberikan sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Titik ekuilibrium $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dari sistem $\dot{x} = f(x)$ dikatakan

1. stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \hat{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$,
2. stabil asimtotik jika titik ekuilibrium $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian hingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$,
3. tidak stabil jika titik ekuilibrium $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tidak memenuhi (1).

Ilustrasi untuk Definisi 2.8 ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Ilustrasi Kestabilan

Selanjutnya diberikan teorema tentang kestabilan untuk mempermudah menganalisa kestabilan suatu sistem disekitar titik ekuilibriumnya.

Teorema 2.2 (Olsder, 2004: 58).

Diberikan sistem dinamik $\dot{x} = Ax$, dengan A matriks berukuran $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

1. Titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.
2. Titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner atau dengan kata lain $Re(\lambda_i) = 0$, yang multiplisitas aljabar dan multisiplisitas geometri sama.

3. Titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$, atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan kata lain $Re(\lambda_i) = 0$, yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.

(\Rightarrow)

Jika titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah stabil asimtotik maka $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$.

Menurut Definisi 2.8, titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$. Sehingga untuk $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ menuju $\hat{x} = 0$. $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem dinamik $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Sehingga untuk $e^{Re(\lambda_i)t}$ yang menuju $\hat{x} = 0$ maka $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$.

(\Leftarrow)

Jika $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik.

$x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$, jika $Re(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \rightarrow \infty$, $e^{Re(\lambda_i)t}$ akan menuju $\hat{x} = 0$. Berdasarkan Definisi 2.8 titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua nilai eigen λ_i

pada sumbu imajiner atau dengan kata lain $Re(\lambda_i) = 0$, yang multiplisitas aljabar dan multisiplisitas geometri sama.

(\Rightarrow)

Jika titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ stabil maka $Re(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Pembuktian menggunakan kontraposisi yaitu dibuktikan bahwa jika ada $Re(\lambda_i) > 0$ maka titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ tidak stabil.

$Re(\lambda_i) > 0$ maka $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$ untuk $t \rightarrow \infty$ akan menuju ∞ yang artinya menjauhi $\hat{x} = 0$. Sehingga sistem tidak stabil. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ stabil maka $Re(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$.

(\Leftarrow)

Jika $Re(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ stabil dan jika ada $Re(\lambda_i) = 0$ maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$, jika $Re(\lambda_i) < 0$ maka $e^{Re(\lambda_i)t}$ akan menuju $\hat{x} = 0$ yang artinya stabil asimtotik. Sistem yang stabil asimtotik, pasti stabil. Jika $Re(\lambda_i) = 0$ maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979: 85), multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen dan multiplisitas geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama. Ambil sebarang sistem pada \mathbb{R}^2 yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni. Diambil sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ dengan } p > 0, q > 0. \quad (2.24)$$

Akan dicari nilai eigen dari Sistem (2.24).

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & -p \\ q & -\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -p \\ q & -\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + pq &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Akar dari Persamaan (2.25) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4pq}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{pq} i}{2} = \pm \sqrt{pq} i$$

sehingga $\lambda_1 = \sqrt{pq} i$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{pq} i$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \sqrt{pq} i$

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & -p \\ q & -i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc|c} -i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] R_1 \sim R_2 \\ &\left[\begin{array}{cc|c} q & -i\sqrt{pq} & 0 \\ -i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array} \right] \frac{1}{q} R_1 \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i\frac{\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ -i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array} \right] R_2 + i\sqrt{pq} R_1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i\frac{\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

sehingga $\begin{bmatrix} 1 & -i\frac{\sqrt{pq}}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Maka diperoleh

$$x_1 - i\frac{\sqrt{pq}}{q}x_2 = 0,$$

misal $x_2 = t$ maka $x_1 = i\frac{\sqrt{pq}}{q}t$ dan diambil $t = 1$ sehingga diperoleh

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -i\sqrt{pq}$

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{pq} & -p \\ q & i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c} i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] R_1 \sim R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} q & i\sqrt{pq} & 0 \\ i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array} \right] \frac{1}{q} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & i\frac{\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array} \right] R_2 + i\sqrt{pq} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & i\frac{\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

sehingga $\begin{bmatrix} 1 & i\frac{\sqrt{pq}}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Maka diperoleh

$$x_1 + i\frac{\sqrt{pq}}{q}x_2 = 0,$$

misal $x_2 = t$ maka $x_1 = -i\frac{\sqrt{pq}}{q}t$ dan diambil $t = 1$ sehingga diperoleh

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Terbukti banyak nilai eigen sama dengan banyak vektor eigen yaitu sebanyak 2.

3. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$, atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan kata lain $Re(\lambda_i) = 0$, yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri.

(\Rightarrow)

Jika titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ tidak stabil maka $Re(\lambda_i) > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Titik ekuilibrium tidak stabil apabila $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ menuju ∞ . Hal tersebut dapat terjadi apabila $Re(\lambda_i) > 0$.

(\Leftarrow)

Jika $Re(\lambda_i) > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ tidak stabil.

Apabila $Re(\lambda_i) > 0$, $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$ akan selalu menuju ∞ . Oleh karena itu, titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$ tidak stabil.

I. Sistem Persamaan Diferensial Tundaan

Sistem persamaan diferensial tundaan ditunjukkan pada Persamaan (2.26).

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (2.26)$$

dengan $f: \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dimana $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ merupakan ruang Banach dari fungsi kontinu yang memetakan $[-\tau, 0]$ ke \mathbb{R}^n .

Contoh 2.8

Persamaan diferensial tundaan dan solusinya (Hal Smith, 2011: 13-14).

Diberikan persamaan diferensial tundaan berikut:

$$\dot{u}(t) = -u(t - \tau), \quad (2.27)$$

dengan $\tau > 0$ dan nilai awal $u(t) = 1, -\tau \leq t \leq 0$.

Maka, pada interval $0 \leq t \leq \tau$ diperoleh $t - \tau \leq 0$ sehingga

$$\dot{u}(t) = -u(t - \tau) = -1. \quad (2.28)$$

Dengan demikian

$$u(t) = u(0) + \int_0^t (-1) ds = 1 - t, 0 \leq t \leq \tau. \quad (2.29)$$

Pada interval $\tau \leq t \leq 2\tau$ diperoleh $0 \leq t - \tau \leq \tau$ sehingga

$$\dot{u}(t) = -u(t - \tau) = -(1 - (t - \tau)), \quad (2.30)$$

dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} u(t) &= u(\tau) + \int_{\tau}^t -(1 - (t - \tau)) ds \\ &= 1 - \tau + \left[-s + \frac{1}{2}(s - \tau)^2 \right]_{s=\tau}^{s=t}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Jadi diperoleh solusi dari Persamaan (2.27) adalah

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!}, (n-1)\tau \leq t < n\tau, n \geq 1. \quad (2.32)$$

Persamaan karakteristik pada sistem persamaan diferensial tundaan dinyatakan dalam $\Delta(\lambda, \tau)$ yaitu sebagai berikut:

$$\Delta(\lambda, \tau) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0$$

dengan P_0 dan P_1 polinomial dalam λ .

Menurut Kar (2003: 451), syarat cukup dan syarat perlu untuk titik ekuilibrium \hat{x} stabil asimtotik untuk setiap $\tau \geq 0$ adalah

1. semua bagian real dari nilai eigen persamaan karakteristik $\Delta(\lambda, 0) = 0$ adalah negatif, dan
2. untuk sebarang bilangan real ω dan $\tau > 0$, $\Delta(i\omega, \tau) \neq 0$.

J. Basic Reproduction Number (\mathcal{R}_0)

Menurut Driessche dan Watmough, *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) adalah jumlah infeksi sekunder yang dihasilkan oleh individu yang terinfeksi tunggal dapat dinyatakan sebagai produk dari durasi yang diharapkan dari periode menular dan tingkat infeksi sekunder terjadi.

Model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen (kelas) disebut kompartemen penyakit jika individu-individu didalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas yang tidak terinfeksi. Model kompartemen dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \mathcal{F}_i(x, y) - \mathcal{V}_i(x, y), i = 1, \dots, n, x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{y}_j &= g_j(x, y), j = 1, \dots, m, y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (2.33)$$

dengan

x adalah kelas yang terinfeksi penyakit,

y adalah kelas yang tidak terinfeksi penyakit,

\mathcal{F}_i adalah matriks dari rata-rata jumlah individu baru yang terinfeksi penyakit,

\mathcal{V}_i adalah matriks dari rata-rata penurunan jumlah individu yang terinfeksi.

Perhitungan *basic reproduction number* berdasarkan linearisasi Sistem (2.33) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Hasil linearisasi dari kelas terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V matriks berukuran $n \times n$,

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(0, y_0)$$

dengan $(0, y_0)$ adalah titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya untuk mencari *basic reproduction number* didefinisikan matriks $K = FV^{-1}$ yang disebut sebagai *next generation matrix* (matriks generasi berikutnya). *Basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) dari model kompartemen adalah $\mathcal{R}_0 = \rho K$ yaitu nilai eigen terbesar dari matriks K .

K. Bifurkasi Hopf

Bifurkasi pada suatu sistem nonlinear berfokus pada sistem yang bergantung pada parameter μ yaitu sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k. \quad (2.34)$$

Definisi 2.9 (Kuznetsov, 1998: 57)

Munculnya potret fase yang tidak ekuivalen secara topologi akibat perubahan nilai parameter disebut bifurkasi.

Salah satu jenis bifurkasi adalah bifurkasi Hopf. Bentuk standar bifurkasi Hopf adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = \alpha x - \omega y + (ax - by)(x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = \omega x + \alpha y + (bx + ay)(x^2 + y^2),$$

atau apabila diubah dalam koordinat polar adalah sebagai berikut:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y},$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r},$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{x(\alpha x - \omega y + (ax - by)(x^2 + y^2))}{r} + \frac{y(\omega x + \alpha y + (bx + ay)(x^2 + y^2))}{r},$$

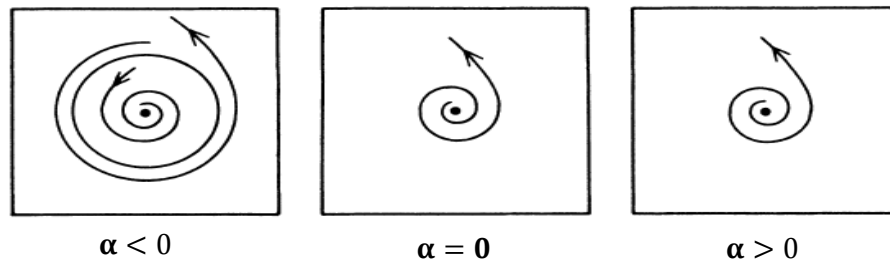
$$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{\alpha(x^2 + y^2) + a(x^2 + y^2)^2}{r},$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \alpha r + ar^3.$$

Sehingga diperoleh bentuk standar bifurkasi Hopf pada koordinat polar yaitu

$$\dot{r} = \alpha r + ar^3. \quad (2.35)$$

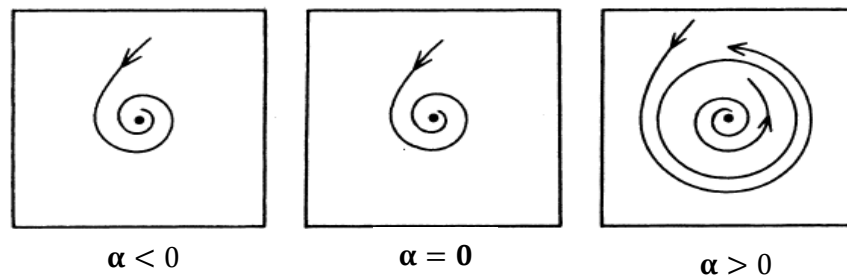
Dari Persamaan (2.35), jika $a > 0$ maka solusi dari Persamaan (2.35) ditunjukkan pada Gambar 4 (Wiggins, 2003: 381).



Gambar 4. Solusi \dot{r} jika $a > 0$

Pada kasus $a > 0$, untuk $\alpha < 0$ maka sistem stabil asimtotik dan membentuk orbit periodik yang tidak stabil, untuk $\alpha = 0$ maka sistem tidak stabil, dan untuk $\alpha > 0$ sistem tidak stabil.

Sedangkan jika $a < 0$ maka solusi dari Persamaan (2.35) ditunjukkan pada Gambar 5 (Wiggins, 2003: 381).



Gambar 5. Solusi \dot{r} jika $a < 0$

Pada kasus $a < 0$, untuk $\alpha < 0$ maka sistem stabil asimtotik, untuk $\alpha = 0$ maka sistem stabil, dan untuk $\alpha > 0$ sistem tidak stabil dan membentuk orbit periodik yang stabil.

Definisi 2.10 (Wiggins: 2003: 71)

Solusi dari $\dot{x} = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n$ yang melalui x_0 dikatakan orbit periodik dengan periode T jika terdapat $T > 0$ sedemikian sehingga $x(t, x_0) = x(t + T, x_0)$ untuk $\forall t \in \mathbb{R}$.

Menurut Wiggins (2003: 380), jari-jari orbit periodik untuk Persamaan (2.35) adalah

$$r = \sqrt{-\frac{\alpha}{a}}.$$

Teorema 2.3 (Guckenheimer, 1985: 151-152)

Misal sistem $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ mempunyai titik ekuilibrium (x_0, μ_0) , mengalami bifurkasi Hopf jika memenuhi

1. $D_x f(x_0, \mu_0)$ mempunyai sepasang nilai eigen imajiner murni dan tidak ada nilai eigen lain dengan bagian real nol,
2. memenuhi kondisi transversal yaitu $\frac{d}{d\mu} \left(\text{Re}(\lambda(\mu)) \right) \neq 0$.

L. Center Manifold

Kestabilan untuk sistem yang memiliki bagian real nilai eigennya adalah nol tidak dapat dilakukan dengan melihat kestabilan linearisasi sistemnya. Oleh karena itu, untuk melakukan analisa kestabilan sistem dengan bagian real nilai eigen nol digunakan teori *center manifold*.

Definisi 2.11 (Wiggins, 2003: 246)

Manifold invariant disebut *center manifold* untuk sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y), \\ \dot{y} &= By + g(x, y), \end{aligned} \tag{2.36}$$

dengan $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$, A matriks berukuran $c \times c$ yang mempunyai bagian real dari nilai eigen adalah nol, B matriks berukuran $s \times s$ dengan bagian real dari nilai eigen adalah negatif, dan $f, g \in C^r$ ($r \geq 2$), jika memenuhi

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \quad (2.37)$$

untuk δ cukup kecil.

Dari Persamaan (2.37) diperoleh

$$y = h(x), \quad (2.38)$$

lalu Persamaan (2.38) diturunkan terhadap waktu sehingga diperoleh

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (2.39)$$

Substitusikan Persamaan (2.38) ke (2.36) sehingga diperoleh

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)), \quad (2.40)$$

$$\dot{y} = Bh(x) + g(x, h(x)), \quad (2.41)$$

selanjutnya substitusikan Persamaan (2.39) ke (2.41) sehingga diperoleh

$$Dh(x)\dot{x} = Bh(x) + g(x, h(x)), \quad (2.42)$$

substitusikan Persamaan (2.40) ke (2.42) maka diperoleh

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x)) \quad (2.43)$$

atau

$$\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (2.44)$$

BAB III PEMBAHASAN

A. Formulasi Model

Model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) membagi populasi menjadi 3 kelas: *Susceptible* (S) yaitu kelompok individu yang rentan terhadap penyakit, *Infected* (I) yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh, dan *Recovered* (R) yaitu kelompok individu yang telah sembuh dan kebal terhadap penyakit. Dalam pembentukan model SIR dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Dalam populasi tidak terjadi imigrasi dan emigrasi.
2. Terjadi kelahiran dan kematian dalam populasi, dimana kelahiran hanya terjadi pada individu-individu kelas *Susceptible* karena penyakit mengakibatkan terjadinya kemandulan pada individu yang telah terinfeksi penyakit, kematian alami terjadi pada setiap kelas dengan laju kematian yang berbeda-beda untuk tiap kelas.
3. Laju kelahiran pada kelas *Susceptible* melebihi laju kematian alaminya.
4. Penyakit tidak menyebabkan kematian, sehingga kematian yang terjadi pada kelas *Infected* hanya kematian alami.
5. Pertumbuhan pada kelas *Susceptible* mengikuti model pertumbuhan logistik dengan *carrying capacity* (kapasitas batas) K . Dalam model pertumbuhan logistik untuk kelas *Susceptible*, interaksi antar individu pada kelas *Susceptible* mengakibatkan kematian.
6. Penularan penyakit terjadi melalui kontak langsung dengan penderita.

7. Pada proses penularan penyakit terjadi masa inkubasi.
8. Individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen sehingga tidak akan terinfeksi penyakit lagi.
9. Laju penularan penyakit merupakan laju penularan bilinear.

Parameter-parameter yang akan digunakan dalam pembentukan model SIR dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear adalah sebagai berikut:

r_1 = Laju kelahiran pada kelas *Susceptible*

r_2 = Laju kematian alami pada kelas *Susceptible*

r_3 = Laju kematian akibat interaksi antar individu pada kelas *Susceptible*

β = Laju kontak antara kelas *Susceptible* dan kelas *Infected*

γ = Laju kesembuhan dari penyakit

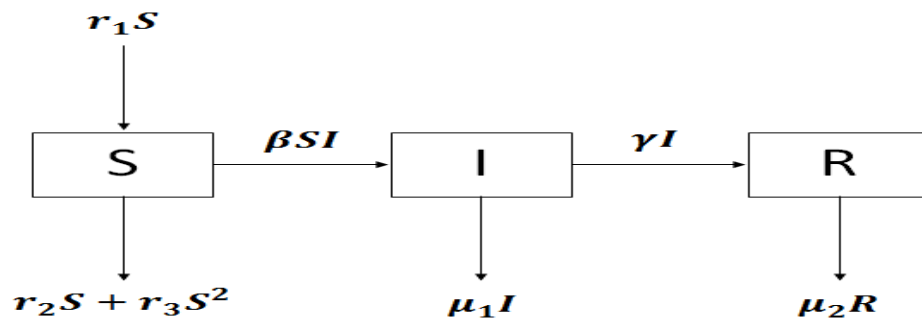
μ_1 = Laju kematian alami pada kelas *Infected*

μ_2 = Laju kematian alami pada kelas *Recovered*

τ = Waktu inkubasi

dengan $r_1, r_2, r_3, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2$, dan $\tau > 0$, serta $r_1 > r_2$.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diuraikan tersebut maka dapat dibentuk diagram transfer model SIR yaitu ditunjukkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Diagram Transfer Model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan Laju Penularan Bilinear

Berdasarkan diagram transfer pada Gambar 6, jumlah individu pada kelas *Susceptible* akan meningkat karena adanya kelahiran pada kelas *Susceptible*, sedangkan jumlah individu pada kelas *Susceptible* akan menurun disebabkan adanya individu rentan yang terinfeksi penyakit, adanya kematian alami pada kelas *Susceptible*, dan kematian yang diakibatkan dari interaksi antar individu pada kelas *Susceptible*. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + r_1 S - r_2 S - r_3 S^2. \quad (3.1)$$

Jumlah individu pada kelas *Infected* akan meningkat yang disebabkan adanya individu rentan yang terinfeksi penyakit, sedangkan jumlah individu pada kelas *Infected* akan menurun karena adanya individu yang sembuh dari penyakit dan adanya kematian alami pada individu yang terinfeksi penyakit. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu_1 I - \gamma I. \quad (3.2)$$

Jumlah individu pada kelas *Recovered* akan meningkat karena adanya individu yang sembuh dari penyakit, sedangkan jumlah individu kelas *Recovered* akan menurun karena adanya kematian pada individu yang telah sembuh. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_2 R. \quad (3.3)$$

Berdasarkan Persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) maka dapat diperoleh model SIR yang ditunjukkan pada Sistem (3.4)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\beta SI + r_1 S - r_2 S - r_3 S^2, \\ \dot{I} &= \beta SI - \mu_1 I - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu_2 R. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kelas *Susceptible* dari model SIR memenuhi model pertumbuhan logistik sehingga Sistem (3.4) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI + r \left(1 - \frac{S}{K}\right) S, \\ \dot{I} &= \beta SI - \mu_1 I - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu_2 R,\end{aligned}\tag{3.5}$$

dengan $r = r_1 - r_2 > 0$ dan $K = \frac{r_1 - r_2}{r_3}$ merupakan *carrying capacity*.

Berdasarkan asumsi bahwa pada penularan penyakit terjadi masa inkubasi maka untuk βSI , I tidak hanya dipengaruhi oleh waktu t namun juga dipengaruhi oleh waktu inkubasi τ , sehingga diperoleh sistem berikut:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t - \tau) + r \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t), \\ \dot{I}(t) &= \beta S(t)I(t - \tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) &= \gamma I(t) - \mu_2 R(t).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Didefinisikan

$$\tilde{S} = \frac{S}{K}, \tilde{I} = \frac{I}{K}, \tilde{R} = \frac{R}{K}, \tilde{t} = \beta K t, \tilde{r} = \frac{r}{\beta K}, \tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\beta K}, \tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\beta K}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta K},$$

maka persamaan pertama dari Sistem (3.6) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t - \tau) + r \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \dot{S}(t) &= \frac{-\beta S(t)}{\beta K} I(t - \tau) + \frac{r}{\beta K} \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t), \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \dot{S}(t) &= -\tilde{S}(t)I(t - \tau) + \tilde{r} \left(1 - \tilde{S}(t)\right) S(t), \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \frac{\dot{S}(t)}{K} &= -\tilde{S}(t) \frac{I(t - \tau)}{K} + \tilde{r} \left(1 - \tilde{S}(t)\right) \frac{S(t)}{K}, \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \frac{\dot{S}(t)}{K} &= -\tilde{S}(t) \tilde{I}(t - \tau) + \tilde{r} \left(1 - \tilde{S}(t)\right) \tilde{S}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\beta K}{\beta K} \frac{\dot{S}(\beta K t)}{K} = -\tilde{S}(\beta K t) \tilde{I}(\beta K(t - \tau)) + \tilde{r} (1 - \tilde{S}(\beta K t)) \tilde{S}(\beta K t), \\
&\Leftrightarrow \tilde{\dot{S}}(\tilde{t}) = -\tilde{S}(\tilde{t}) \tilde{I}(\tilde{t} - \tau) + \tilde{r} (1 - \tilde{S}(\tilde{t})) \tilde{S}(\tilde{t}), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

untuk persamaan kedua dari Sistem (3.6) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\dot{I}(t) = \beta S(t) I(t - \tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \dot{I}(t) = \frac{\beta S(t)}{\beta K} I(t - \tau) - \frac{\mu_1}{\beta K} I(t) - \frac{\gamma}{\beta K} I(t), \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \dot{I}(t) = \tilde{S}(t) I(t - \tau) - \tilde{\mu}_1 I(t) - \tilde{\gamma} I(t), \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \frac{\dot{I}(t)}{K} = \tilde{S}(t) \frac{I(t - \tau)}{K} - \tilde{\mu}_1 \frac{I(t)}{K} - \tilde{\gamma} \frac{I(t)}{K}, \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \frac{\dot{I}(t)}{K} = \tilde{S}(t) \tilde{I}(t - \tau) - \tilde{\mu}_1 \tilde{I}(t) - \tilde{\gamma} \tilde{I}(t), \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta K}{\beta K} \frac{\dot{I}(\beta K t)}{K} = \tilde{S}(\beta K t) \tilde{I}(\beta K(t - \tau)) - \tilde{\mu}_1 \tilde{I}(\beta K t) - \tilde{\gamma} \tilde{I}(\beta K t), \\
&\Leftrightarrow \tilde{\dot{I}}(\tilde{t}) = \tilde{S}(\tilde{t}) \tilde{I}(\tilde{t} - \tau) - \tilde{\mu}_1 \tilde{I}(\tilde{t}) - \tilde{\gamma} \tilde{I}(\tilde{t}), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

dan persamaan ketiga dari Sistem (3.6) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu_2 R(t) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \dot{R}(t) = \frac{\gamma}{\beta K} I(t) - \frac{\mu_2}{\beta K} R(t), \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \dot{R}(t) = \tilde{\gamma} I(t) - \tilde{\mu}_2 R(t), \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \frac{\dot{R}(t)}{K} = \tilde{\gamma} \frac{I(t)}{K} - \tilde{\mu}_2 \frac{R(t)}{K}, \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta K} \frac{\dot{R}(t)}{K} = \tilde{\gamma} \tilde{I}(t) - \tilde{\mu}_2 \tilde{R}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\beta K \dot{R}(\beta K t)}{\beta K} &= \tilde{\gamma} \tilde{I}(\beta K t) - \tilde{\mu}_2 \tilde{R}(\beta K t), \\ \Leftrightarrow \dot{\tilde{R}}(\tilde{t}) &= \tilde{\gamma} \tilde{I}(\tilde{t}) - \tilde{\mu}_2 \tilde{R}(\tilde{t}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Berdasarkan Persamaan (3.7), (3.8), dan (3.9) maka diperoleh sistem

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{S}}(\tilde{t}) &= -\tilde{S}(\tilde{t})\tilde{I}(\tilde{t}-\tau) + \tilde{r}(1-\tilde{S}(\tilde{t}))\tilde{S}(\tilde{t}), \\ \dot{\tilde{I}}(\tilde{t}) &= \tilde{S}(\tilde{t})\tilde{I}(\tilde{t}-\tau) - \tilde{\mu}_1 \tilde{I}(\tilde{t}) - \tilde{\gamma} \tilde{I}(\tilde{t}), \\ \dot{\tilde{R}}(\tilde{t}) &= \tilde{\gamma} \tilde{I}(\tilde{t}) - \tilde{\mu}_2 \tilde{R}(\tilde{t}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Selanjutnya tanda ' \sim ' pada Sistem (3.10) dapat dihilangkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -S(t)I(t-\tau) + r(1-S(t))S(t), \\ \dot{I}(t) &= S(t)I(t-\tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) &= \gamma I(t) - \mu_2 R(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

B. Titik Ekuilibrium

Akan dibahas mengenai titik-titik ekuilibrium dari Sistem (3.11) yang disajikan dalam Lemma 3.1.

Lemma 3.1

Misal $E = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ adalah titik ekuilibrium Sistem (3.11).

1. Jika $\hat{I} = 0$ maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (0,0,0)$ dan $E_1 = (1,0,0)$.
2. Jika $\hat{I} \neq 0$ maka diperoleh titik ekuilibrium endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ dengan $S^* = \mu_1 + \gamma$, $I^* = r(1 - (\mu_1 + \gamma))$, dan $R^* = \frac{\gamma}{\mu_2} I^*$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.4 maka titik ekuilibrium $E = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ harus memenuhi

$$-\hat{S}\hat{I} + r(1-\hat{S})\hat{S} = 0, \quad (3.12)$$

$$\hat{S}\hat{I} - \mu_1\hat{I} - \gamma\hat{I} = 0, \quad (3.13)$$

$$\gamma\hat{I} - \mu_2\hat{R} = 0. \quad (3.14)$$

1. Substitusikan $\hat{I} = 0$ ke Persamaan (3.12) maka diperoleh

$$-\hat{S}\hat{I} + r(1 - \hat{S})\hat{S} = 0$$

$$\Leftrightarrow r\hat{S}(1 - \hat{S}) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \hat{S} = 0, \hat{S} = 1.$$

Selanjutnya substitusikan $\hat{I} = 0$ ke Persamaan (3.14) maka diperoleh

$$\gamma\hat{I} - \mu_2\hat{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu_2\hat{R} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \hat{R} = 0.$$

Jadi titik ekuilibrium bebas penyakit dari Sistem (3.11) adalah $E_0 = (0,0,0)$

dan $E_1 = (1,0,0)$.

2. Dari Persamaan (3.12) maka diperoleh

$$-\hat{S}\hat{I} + r(1 - \hat{S})\hat{S} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{S}(-\hat{I} + r - r\hat{S}) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \hat{S} = 0, \hat{S} = \frac{-\hat{I}+r}{r},$$

untuk $\hat{S} = \frac{-\hat{I}+r}{r}$ diperoleh titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya

substitusikan $\hat{S} = \frac{-\hat{I}+r}{r}$ ke Persamaan (3.13) sehingga diperoleh

$$\hat{S}\hat{I} - \mu_1\hat{I} - \gamma\hat{I} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\hat{I}+r}{r}\hat{I} - \mu_1\hat{I} - \gamma\hat{I} = 0,$$

$$\Leftrightarrow (-\hat{I} + r)\hat{I} - r\mu_1\hat{I} - r\gamma\hat{I} = 0,$$

$$\Leftrightarrow -\hat{I}(\hat{I} - r + r\mu_1 + r\gamma) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \hat{I} = 0, \hat{I} = r(1 - \mu_1 - \gamma),$$

untuk $\hat{I} = r(1 - \mu_1 - \gamma)$ menghasilkan titik ekuilibrium endemik, lalu substitusikan $\hat{I} = r(1 - \mu_1 - \gamma)$ ke Persamaan (3.14) maka diperoleh

$$\gamma\hat{I} - \mu_2\hat{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma(r(1 - \mu_1 - \gamma)) - \mu_2\hat{R} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \hat{R} = \frac{\gamma r(1 - \mu_1 - \gamma)}{\mu_2}.$$

Jadi titik ekuilibrium endemik dari Sistem (3.11) adalah $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$

$$\text{dengan } S^* = \frac{-I^* + r}{r} = \frac{-r(1 - \mu_1 - \gamma) + r}{r} = \mu_1 + \gamma, \quad I^* = r(1 - \mu_1 - \gamma) =$$

$$r(1 - (\mu_1 + \gamma)), \text{ dan } R^* = \frac{\gamma r(1 - \mu_1 - \gamma)}{\mu_2} = \frac{\gamma}{\mu_2} I^*.$$

C. Basic Reproduction Number (\mathcal{R}_0)

Akan dicari *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) dari Sistem (3.11). Kelas terinfeksi model SIR pada Sistem (3.11) adalah kelas I , sehingga persamaan diferensial yang digunakan adalah

$$\dot{I}(t) = S(t)I(t - \tau) - \mu_1 I(t) - \gamma I(t). \quad (3.15)$$

Persamaan (3.15) dapat ditulis dalam bentuk persamaan berikut:

$$\dot{I}(t) = \mathcal{F}(S, I) - \mathcal{V}(S, I), \quad (3.16)$$

dengan $\mathcal{F}(S, I) = S(t)I(t - \tau)$ dan $\mathcal{V}(S, I) = \mu_1 I(t) + \gamma I(t)$.

Selanjutnya akan dicari F dan V yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I} = [S] \text{ dan } \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial I} = [\mu_1 + \gamma],$$

karena $E_1 = (1, 0, 0)$ adalah titik ekuilibrium bebas penyakit dari Sistem (3.11) maka

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I}(1, 0, 0) = [1] \text{ dan } V = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial I}(1, 0, 0) = [\mu_1 + \gamma].$$

Selanjutnya akan dicari *next generation matrix* yaitu sebagai berikut:

$$FV^{-1} = [1] \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 + \gamma \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh *basic reproduction number* (\mathcal{R}_0) yang merupakan nilai eigen terbesar dari matriks FV^{-1} yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\mu_1 + \gamma}.$$

D. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Akan dibahas kestabilan Sistem (3.11) disekitar titik ekuilibriumnya. Sistem (3.11) merupakan sistem dinamik nonlinear sehingga untuk memudahkan dalam menentukan sifat kestabilan dari titik-titik ekuilibrium Sistem (3.11) maka harus dilakukan linearisasi Sistem (3.11). Misal $E = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ adalah titik-titik ekuilibrium dari Sistem (3.11). Sistem (3.11) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - S(t))S(t) \\ -(\mu_1 + \gamma)I(t) \\ \gamma I(t) - \mu_2 R(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S(t)I(t - \tau) \\ S(t)I(t - \tau) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Lalu dimisalkan

$$\begin{pmatrix} f_1(S(t), I(t), R(t)) \\ f_2(S(t), I(t), R(t)) \\ f_3(S(t), I(t), R(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - S(t))S(t) \\ -(\mu_1 + \gamma)I(t) \\ \gamma I(t) - \mu_2 R(t) \end{pmatrix}, \text{ dan} \quad (3.18)$$

$$\begin{pmatrix} g_1(S(t), I(t - \tau), R(t)) \\ g_2(S(t), I(t - \tau), R(t)) \\ g_3(S(t), I(t - \tau), R(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S(t)I(t - \tau) \\ S(t)I(t - \tau) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Selanjutnya akan dilakukan linearisasi Sistem (3.11) dengan memisalkan

$$x(t) = S(t) - \hat{S},$$

$$y(t) = I(t) - \hat{I},$$

$$y(t - \tau) = I(t - \tau) - \hat{I},$$

$$z(t) = R(t) - \hat{R}.$$

Akan dicari deret Taylor dari f_1, f_2, f_3, g_1, g_2 , dan g_3 disekitar titik ekuilibrium

$$E = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}).$$

$$\begin{aligned} f_1(S(t), I(t), R(t)) &= f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \frac{\partial f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial S(t)} (S(t) - \hat{S}) \\ &\quad + \frac{\partial f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial I(t)} (I(t) - \hat{I}) + \frac{\partial f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial R(t)} (R(t) - \hat{R}) + R_{f_1} \\ &= f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + (r - 2r\hat{S})x(t) + R_{f_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(S(t), I(t), R(t)) &= f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \frac{\partial f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial S(t)} (S(t) - \hat{S}) \\ &\quad + \frac{\partial f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial I(t)} (I(t) - \hat{I}) + \frac{\partial f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial R(t)} (R(t) - \hat{R}) + R_{f_2} \\ &= f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) - (\mu_1 + \gamma)y(t) + R_{f_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(S(t), I(t), R(t)) &= f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \frac{\partial f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial S(t)} (S(t) - \hat{S}) \\ &\quad + \frac{\partial f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial I(t)} (I(t) - \hat{I}) + \frac{\partial f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial R(t)} (R(t) - \hat{R}) + R_{f_3} \\ &= f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \gamma y(t) - \mu_2 z(t) + R_{f_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(S(t), I(t-\tau), R(t)) &= g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \frac{\partial g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial S(t)} (S(t) - \hat{S}) \\
&\quad + \frac{\partial g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial I(t-\tau)} (I(t-\tau) - \hat{I}) \\
&\quad + \frac{\partial g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial R(t)} (R(t) - \hat{R}) + R_{g_1} \\
&= g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) - \hat{I}x(t) - \hat{S}y(t-\tau) + R_{g_1}, \\
g_2(S(t), I(t-\tau), R(t)) &= g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \frac{\partial g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial S(t)} (S(t) - \hat{S}) \\
&\quad + \frac{\partial g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial I(t-\tau)} (I(t-\tau) - \hat{I}) \\
&\quad + \frac{\partial g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial R(t)} (R(t) - \hat{R}) + R_{g_2} \\
&= g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \hat{I}x(t) + \hat{S}y(t-\tau) + R_{g_2}, \\
g_3(S(t), I(t-\tau), R(t)) &= g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \frac{\partial g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial S(t)} (S(t) - \hat{S}) \\
&\quad + \frac{\partial g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial I(t-\tau)} (I(t-\tau) - \hat{I}) \\
&\quad + \frac{\partial g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})}{\partial R(t)} (R(t) - \hat{R}) + R_{g_3} \\
&= g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + R_{g_3},
\end{aligned}$$

karena $R_{f_1}, R_{f_2}, R_{f_3}, R_{g_1}, R_{g_2}$, dan R_{g_3} mendekati nol maka dapat diabaikan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + (r - 2r\hat{S})x(t) + g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) - \hat{I}x(t) - \hat{S}y(t-\tau), \\
\dot{y}(t) &= f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) - (\mu_1 + \gamma)y(t) + g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \hat{I}x(t) + \hat{S}y(t-\tau), \\
\dot{z}(t) &= f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) + \gamma y(t) - \mu_2 z(t) + g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}).
\end{aligned}$$

$E = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ adalah titik ekuilibrium Sistem (3.11) maka $f_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = f_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = f_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = g_1(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = g_2(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = g_3(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (r - 2r\hat{S})x(t) - \hat{I}x(t) - \hat{S}y(t - \tau), \\ \dot{y}(t) &= \hat{I}x(t) - (\mu_1 + \gamma)y(t) + \hat{S}y(t - \tau), \\ \dot{z}(t) &= \gamma y(t) - \mu_2 z(t).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Misalkan solusi dari Sistem (3.20) adalah

$$x(t) = le^{\lambda t}, y(t) = me^{\lambda t}, \text{ dan } z(t) = ne^{\lambda t}.\tag{3.21}$$

Substitusikan Persamaan (3.21) ke (3.20) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}l\lambda e^{\lambda t} &= (r - 2r\hat{S})le^{\lambda t} - \hat{I}le^{\lambda t} - \hat{S}me^{\lambda(t-\tau)}, \\ m\lambda e^{\lambda t} &= \hat{I}le^{\lambda t} - (\mu_1 + \gamma)me^{\lambda t} + \hat{S}me^{\lambda(t-\tau)}, \\ n\lambda e^{\lambda t} &= \gamma me^{\lambda t} - \mu_2 ne^{\lambda t}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Sistem (3.22) dibagi dengan $e^{\lambda t}$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned}l\lambda &= (r - 2r\hat{S})l - \hat{I}l - \hat{S}me^{-\lambda\tau}, \\ m\lambda &= \hat{I}l - (\mu_1 + \gamma)m + \hat{S}me^{-\lambda\tau}, \\ n\lambda &= \gamma m - \mu_2 n.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Sistem (3.23) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} l\lambda \\ m\lambda \\ n\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - 2r\hat{S} - \hat{I} & -\hat{S}e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \hat{I} & \hat{S}e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}.\tag{3.24}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\det \left(\begin{bmatrix} r - 2r\hat{S} - \hat{I} & -\hat{S}e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \hat{I} & \hat{S}e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} r - 2r\hat{S} - \hat{I} & -\hat{S}e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \hat{I} & \hat{S}e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} r - 2r\hat{S} - \hat{I} - \lambda & -\hat{S}e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \hat{I} & \hat{S}e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0, \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} r - 2r\hat{S} - \hat{I} - \lambda & -\hat{S}e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \hat{I} & \hat{S}e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Kestabilan Sistem (3.11) disekitar titik ekuilibriumnya disajikan dalam Lemma 3.2, Lemma 3.3, Lemma 3.4, dan Lemma 3.5.

Lemma 3.2

Titik ekuilibrium $E_0 = (0, 0, 0)$ dari Sistem (3.11) bersifat tidak stabil.

Bukti:

Akan dicari kestabilan dari titik ekuilibrium $E_0 = (0, 0, 0)$. Berdasarkan Persamaan (3.25) maka diperoleh persamaan karakteristik dari linearisasi Sistem (3.11) pada E_0 yaitu

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} r - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 - \gamma - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (r - \lambda)(-\mu_1 - \gamma - \lambda)(-\mu_2 - \lambda) = 0.
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -\mu_1 - \gamma$, dan $\lambda_3 = -\mu_2$. Berdasarkan Teorema 2.2, karena ada $Re(\lambda_i) > 0$ maka titik ekuilibrium $E_0 = (0, 0, 0)$ tidak stabil.

Lemma 3.3

Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka kestabilan titik ekuilibrium $E_1 = (1, 0, 0)$ dari Sistem (3.11) adalah stabil asimtotik.

Bukti:

Akan dicari kestabilan dari titik ekuilibrium $E_1 = (1, 0, 0)$. Berdasarkan Persamaan (3.25) maka diperoleh persamaan karakteristik dari linearisasi Sistem (3.11) pada E_1 yaitu

$$\begin{vmatrix} -r - \lambda & -e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-r - \lambda)(e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda)(-\mu_2 - \lambda) = 0.$$

Jadi diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -r < 0,$$

$$\lambda_2 = -\mu_2 < 0,$$

dan akar dari persamaan

$$e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda = 0. \quad (3.26)$$

Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka

$$\frac{1}{\mu_1 + \gamma} < 1$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 + \gamma > 1.$$

Berdasarkan Kar, akan ditunjukkan bahwa saat $\tau = 0$ maka semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Saat $\tau = 0$ maka Persamaan (3.26) menjadi

$$1 - (\mu_1 + \gamma) - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 - (\mu_1 + \gamma) < 0.$$

Sehingga ketika $\tau = 0$, semua nilai eigen memiliki bagian real negatif.

Berdasarkan Kar, akan ditunjukkan bahwa saat $\tau > 0$ tidak ada nilai eigen imajiner murni. Andaikan saat $\tau > 0$, persamaan karakteristik dari linearisasi

Sistem (3.11) pada E_1 memiliki nilai eigen imajiner murni yaitu $\lambda = i\omega$.

Substitusikan $\lambda = i\omega$ ke Persamaan (3.26) sehingga diperoleh

$$e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\omega\tau} - \mu_1 - \gamma - i\omega = 0,$$

$$\Leftrightarrow (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) - \mu_1 - \gamma - i\omega = 0,$$

$$\Leftrightarrow (-\mu_1 - \gamma + \cos \omega\tau) + i(-\sin \omega\tau - \omega) = 0,$$

sehingga diperoleh

$$-\mu_1 - \gamma + \cos \omega\tau = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu_1 - \gamma = -\cos \omega\tau, \quad (3.27)$$

dan

$$-\sin \omega\tau - \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow -\omega = \sin \omega\tau. \quad (3.28)$$

Selanjutnya Persamaan (3.27) dan (3.28) dikuadratkan sehingga diperoleh

$$(\mu_1 + \gamma)^2 = \cos^2 \omega\tau, \text{ dan} \quad (3.29)$$

$$\omega^2 = \sin^2 \omega\tau. \quad (3.30)$$

Lalu Persamaan (3.29) dan (3.30) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$\omega^2 + (\mu_1 + \gamma)^2 = 1,$$

karena $\mu_1 + \gamma > 1$ maka $\omega^2 < 0$. Sehingga tidak ada bilangan real ω yang memenuhi Persamaan (3.26). Dengan demikian, persamaan karakteristik dari linearisasi Sistem (3.11) pada E_1 tidak memiliki nilai eigen imajiner murni saat $\tau > 0$. Jadi berdasarkan Kar, titik ekuilibrium $E_1 = (1, 0, 0)$ stabil asimtotik saat $\tau \geq 0$.

Lemma 3.4

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik ekuilibrium $E_1 = (1,0,0)$ dari Sistem (3.11) tidak stabil.

Bukti:

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka

$$\frac{1}{\mu_1 + \gamma} > 1$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 + \gamma < 1.$$

Andaikan semua nilai eigen dari persamaan karakteristik hasil linearisasi Sistem (3.11) pada E_1 memiliki bagian real negatif. Selanjutnya dimisalkan

$-\frac{1}{\tau} < \lambda < 0$ maka Persamaan (3.26) menjadi sebagai berikut:

$$e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -(\mu_1 + \gamma) + e^{-\lambda\tau},$$

karena $\mu_1 + \gamma < 1$ dan $e^{-\lambda\tau} > 1$ maka $\lambda > 0$. Sehingga kontradiksi dengan $\lambda < 0$ maka yang benar adalah $\lambda > 0$.

Jadi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ ada nilai eigen yang memiliki $Re(\lambda_i) > 0$ maka berdasarkan Teorema 2.2, titik ekuilibrium $E_1 = (1, 0, 0)$ tidak stabil.

Lemma 3.5

Titik ekuilibrium $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ dari Sistem (3.11) dengan $S^* = \mu_1 + \gamma$, $I^* = r(1 - (\mu_1 + \gamma))$, dan $R^* = \frac{\gamma}{\mu_2} I^*$,

1. jika $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$ maka stabil asimtotik,
2. jika $\mathcal{R}_0 > 3$ maka titik ekuilibrium E_+ mengalami bifurkasi Hopf pada saat $\tau = \tau_n, n = 0, 1, 2, \dots$

Bukti:

Akan dicari kestabilan dari titik ekuilibrium $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$. Berdasarkan Persamaan (3.25) maka diperoleh persamaan karakteristik dari linearisasi Sistem (3.11) pada E_+ yaitu

$$\begin{vmatrix} -I^* + r - 2rS^* - \lambda & -S^*e^{-\lambda\tau} & 0 \\ I^* & S^*e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-I^* + r - 2rS^* - \lambda)(S^*e^{-\lambda\tau} - \mu_1 - \gamma - \lambda)(-\mu_2 - \lambda) - (-\mu_2 - \lambda)$$

$$I^*(-S^*e^{-\lambda\tau}) = 0,$$

$$\Leftrightarrow (-S^*I^*e^{-\lambda\tau} + (\mu_1 + \gamma)I^* + I^*\lambda + rS^*e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma)r - r\lambda -$$

$$2rS^{*2}e^{-\lambda\tau} + 2r(\mu_1 + \gamma)S^* + 2rS^*\lambda - \lambda S^*e^{-\lambda\tau} + (\mu_1 + \gamma)\lambda + \lambda^2$$

$$+ S^*I^*e^{-\lambda\tau})(-\mu_2 - \lambda) = 0,$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + (I^* - r + 2rS^* - S^*e^{-\lambda\tau} + (\mu_1 + \gamma))\lambda + ((\mu_1 + \gamma) - S^*e^{-\lambda\tau}))$$

$$(I^* - r + 2rS^*) + S^*I^*e^{-\lambda\tau})(-\mu_2 - \lambda) = 0.$$

Jadi diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -\mu_2 < 0,$$

dan akar persamaan

$$\lambda^2 + (I^* - r + 2rS^* - S^*e^{-\lambda\tau} + (\mu_1 + \gamma))\lambda + ((\mu_1 + \gamma) - S^*e^{-\lambda\tau})$$

$$(I^* - r + 2rS^*) + S^*I^*e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.31)$$

karena

$$\begin{aligned} I^* + rS^* &= r(1 - (\mu_1 + \gamma)) + r(\mu_1 + \gamma) \\ &= r(\mu_1 + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1) + r(\mu_1 + \gamma) \\ &= r(\mu_1 + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1 + 1) \end{aligned}$$

$$= r(\mu_1 + \gamma) \frac{1}{\mu_1 + \gamma} = r,$$

maka Persamaan (3.31) menjadi

$$\begin{aligned} \lambda^2 + ((\mu_1 + \gamma) - S^* e^{-\lambda\tau} + rS^*)\lambda + ((\mu_1 + \gamma) - S^* e^{-\lambda\tau})rS^* + S^* I^* e^{-\lambda\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + ((\mu_1 + \gamma) + rS^*)\lambda + (\mu_1 + \gamma)rS^* + e^{-\lambda\tau}(-S^*\lambda - rS^{*2} + & \\ S^* I^*) &= 0, \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + ((\mu_1 + \gamma) + rS^*)\lambda + (\mu_1 + \gamma)rS^* &= e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^* I^*), \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + (S^* + rS^*)\lambda + rS^{*2} &= e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^* I^*), \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + (1 + r)S^*\lambda + rS^{*2} &= e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^* I^*). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Berdasarkan Kar, akan ditunjukkan bahwa saat $\tau = 0$ maka semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Saat $\tau = 0$ maka Persamaan (3.32) menjadi

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (1 + r)S^*\lambda + rS^{*2} &= S^*\lambda + rS^{*2} - S^* I^* \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + rS^*\lambda + S^* I^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Akar dari Persamaan (3.33) adalah

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{-rS^* \pm \sqrt{r^2 S^{*2} - 4S^* I^*}}{2} \\ &= \frac{-rS^* \pm \sqrt{S^*(r^2 S^* - 4I^*)}}{2} \\ &= \frac{-r(\mu_1 + \gamma) \pm \sqrt{(\mu_1 + \gamma)(r^2(\mu_1 + \gamma) - 4r(1 - \mu_1 - \gamma))}}{2} \\ &= \frac{-r(\mu_1 + \gamma) \pm \sqrt{(\mu_1 + \gamma)r(r(\mu_1 + \gamma) + 4(\mu_1 + \gamma) - 4)}}{2}, \end{aligned}$$

sehingga semua akar dari Persamaan (3.33) memiliki bagian real negatif. Jadi titik ekuilibrium $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ stabil asimtotik saat $\tau = 0$.

Berdasarkan Kar, akan ditunjukkan bahwa saat $\tau > 0$ tidak ada nilai eigen imajiner murni. Andaikan saat $\tau > 0$, persamaan karakteristik dari linearisasi Sistem (3.11) pada E_+ memiliki nilai eigen imajiner murni yaitu $\lambda = i\omega (\omega > 0)$. Substitusikan $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ ke Persamaan (3.32) yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + (1+r)S^*\lambda + rS^{*2} &= e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) \\
\Leftrightarrow (i\omega)^2 + (1+r)S^*i\omega + rS^{*2} &= e^{-i\omega\tau} (S^*i\omega + rS^{*2} - S^*I^*), \\
\Leftrightarrow -\omega^2 + (1+r)S^*i\omega + rS^{*2} &= (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau)(S^*i\omega + rS^{*2} - S^*I^*), \\
\Leftrightarrow (-\omega^2 + rS^{*2}) + i\omega(1+r)S^* &= ((rS^{*2} - S^*I^*) \cos \omega\tau + \omega S^* \sin \omega\tau) + \\
&\quad i(\omega S^* \cos \omega\tau - (rS^{*2} - S^*I^*) \sin \omega\tau),
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$-\omega^2 + rS^{*2} = (rS^{*2} - S^*I^*) \cos \omega\tau + \omega S^* \sin \omega\tau, \quad (3.34)$$

dan

$$\omega(1+r)S^* = \omega S^* \cos \omega\tau - (rS^{*2} - S^*I^*) \sin \omega\tau. \quad (3.35)$$

Selanjutnya Persamaan (3.34) dan (3.35) dikuadratkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega^4 - 2r\omega^2 S^{*2} + r^2 S^{*4} &= (rS^{*2} - S^*I^*)^2 \cos^2 \omega\tau + 2(rS^{*2} - S^*I^*)\omega S^* \\
&\quad \sin \omega\tau \cos \omega\tau + \omega^2 S^{*2} \sin^2 \omega\tau,
\end{aligned} \quad (3.36)$$

dan

$$\begin{aligned}
\omega^2(1+r)^2 S^{*2} &= \omega^2 S^{*2} \cos^2 \omega\tau - 2\omega S^*(rS^{*2} - S^*I^*) \sin \omega\tau \cos \omega\tau + \\
&\quad (rS^{*2} - S^*I^*)^2 \sin^2 \omega\tau.
\end{aligned} \quad (3.37)$$

Lalu Persamaan (3.36) dan (3.37) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega^4 - 2r\omega^2 S^{*2} + r^2 S^{*4} + \omega^2(1+r)^2 S^{*2} &= (rS^{*2} - S^* I^*)^2 + \omega^2 S^{*2} \\
\Leftrightarrow \omega^4 - 2r\omega^2 S^{*2} + r^2 S^{*4} + \omega^2 S^{*2} + 2r\omega^2 S^{*2} + \omega^2 r^2 S^{*2} &= r^2 S^{*4} - \\
2rS^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + \omega^2 S^{*2}, \\
\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 r^2 S^{*2} + 2rS^{*3} I^* - S^{*2} I^{*2} &= 0, \\
\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 r^2 S^{*2} + rS^{*3} I^* \left(2 - \frac{1}{rS^*} I^*\right) &= 0, \\
\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 r^2 S^{*2} + rS^{*3} I^* \left(\frac{2rS^* - I^*}{rS^*}\right) &= 0, \\
\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 r^2 S^{*2} + rS^{*3} I^* \left(\frac{2rS^* + rS^* - r}{rS^*}\right) &= 0, \\
\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 r^2 S^{*2} + rS^{*3} I^* \left(3 - \frac{1}{S^*}\right) &= 0, \\
\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 r^2 S^{*2} + rS^{*3} I^* (3 - \mathcal{R}_0) &= 0. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

1. Akar Persamaan (3.38) adalah sebagai berikut:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-r^2 S^{*2} \pm \sqrt{(r^2 S^{*2})^2 - 4rS^{*3} I^* (3 - \mathcal{R}_0)}}{2}. \tag{3.39}$$

Jika $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$ maka diperoleh $\omega_{1,2}^2 \leq 0$ sehingga tidak ada bilangan real $\omega > 0$ yang memenuhi Persamaan (3.38). Dengan demikian, persamaan karakteristik dari linearisasi Sistem (3.11) pada E_+ tidak memiliki nilai eigen imajiner murni saat $\tau > 0$. Jadi berdasarkan Kar, titik ekuilibrium $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ stabil asimtotik saat $\tau \geq 0$.

2. Jika $\mathcal{R}_0 > 3$, maka terdapat bilangan real ω_0 yang memenuhi Persamaan (3.38). Sehingga Persamaan (3.38) memiliki sepasang akar imajiner murni $\pm i\omega_0$. Berdasarkan Persamaan (3.34) dan (3.35) dapat diperoleh τ_n . Substitusikan ω_0 ke Persamaan (3.34) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
-\omega_0^2 + rS^{*2} &= (rS^{*2} - S^*I^*) \cos \omega_0 \tau + \omega_0 S^* \sin \omega_0 \tau \\
\Leftrightarrow \sin \omega_0 \tau &= \frac{-\omega_0^2 + rS^{*2} - (rS^{*2} - S^*I^*) \cos \omega_0 \tau}{\omega_0 S^*}, \tag{3.40}
\end{aligned}$$

selanjutnya substitusikan ω_0 ke Persamaan (3.35) sehingga diperoleh

$$\omega_0(1+r)S^* = \omega_0 S^* \cos \omega_0 \tau - (rS^{*2} - S^*I^*) \sin \omega_0 \tau. \tag{3.41}$$

Substitusikan Persamaan (3.40) ke (3.41) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega_0(1+r)S^* &= \omega_0 S^* \cos \omega_0 \tau - (rS^{*2} - S^*I^*) \\
&\quad \left(\frac{-\omega_0^2 + rS^{*2} - (rS^{*2} - S^*I^*) \cos \omega_0 \tau}{\omega_0 S^*} \right) \\
\Leftrightarrow \omega_0^2(1+r)S^{*2} &= \omega_0^2 S^{*2} \cos \omega_0 \tau - (rS^{*2} - S^*I^*) \\
&\quad (-\omega_0^2 + rS^{*2} - (rS^{*2} - S^*I^*) \cos \omega_0 \tau), \\
\Leftrightarrow \omega_0^2(1+r)S^{*2} &= \omega_0^2 S^{*2} \cos \omega_0 \tau - (rS^{*2} - S^*I^*)(-\omega_0^2 + rS^{*2}) \\
&\quad + (rS^{*2} - S^*I^*)^2 \cos \omega_0 \tau, \\
\Leftrightarrow \omega_0^2(1+r)S^{*2} &= \cos \omega_0 \tau \left(\omega_0^2 S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)^2 \right) - \\
&\quad (rS^{*2} - S^*I^*)(-\omega_0^2 + rS^{*2}), \\
\Leftrightarrow \cos \omega_0 \tau &= \frac{\omega_0^2(1+r)S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)(-\omega_0^2 + rS^{*2})}{\omega_0^2 S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)^2}, \\
\Leftrightarrow \omega_0 \tau &= \arccos \frac{\omega_0^2(1+r)S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)(-\omega_0^2 + rS^{*2})}{\omega_0^2 S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)^2},
\end{aligned}$$

maka

$$\omega_0 \tau_n = \arccos \frac{\omega_0^2(1+r)S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)(-\omega_0^2 + rS^{*2})}{\omega_0^2 S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)^2} + 2n\pi,$$

dengan $n = 0, 1, 2, \dots$

sehingga

$$\tau_n = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{\omega_0^2(1+r)S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)(-\omega_0^2 + rS^{*2})}{\omega_0^2 S^{*2} + (rS^{*2} - S^*I^*)^2} + \frac{2n\pi}{\omega_0},$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Selanjutnya akan diselidiki bahwa titik ekuilibrium E_+ memenuhi kondisi transversal. Akan diturunkan Persamaan (3.32) terhadap τ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (2\lambda + (1+r)S^*) \frac{d\lambda}{d\tau} &= (-\tau e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) + e^{-\lambda\tau} S^*) \frac{d\lambda}{d\tau} - \\ &\quad \lambda e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) \\ \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} (2\lambda + (1+r)S^* + \tau e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) - e^{-\lambda\tau} S^*) \\ &= -\lambda e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*), \\ \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{-\lambda e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)}{2\lambda + (1+r)S^* + \tau e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) - e^{-\lambda\tau} S^*}, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + (1+r)S^* + \tau e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) - e^{-\lambda\tau} S^*}{-\lambda e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)}, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + (1+r)S^*}{-\lambda e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &\quad + \frac{S^*}{\lambda(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)}, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda^2 + (1+r)\lambda S^*}{-\lambda^2 e^{-\lambda\tau} (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} + \\ &\quad \frac{\lambda S^*}{\lambda^2 (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Berdasarkan Persamaan (3.32) maka diperoleh

$$S^*\lambda = \frac{e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) - \lambda^2 - rS^{*2}}{1+r}, \quad (3.43)$$

selanjutnya substitusikan Persamaan (3.43) ke (3.42) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda^2 + (1+r) \frac{e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) - \lambda^2 - rS^{*2}}{1+r}}{-\lambda^2 e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} \\ &\quad + \frac{\lambda S^*}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{\lambda^2 + e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*) - rS^{*2}}{-\lambda^2 e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} \\ &\quad + \frac{\lambda S^*}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda}, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{\lambda^2 - rS^{*2}}{-\lambda^2 e^{-\lambda\tau}(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} \\ &\quad + \frac{\lambda S^*}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Berdasarkan Persamaan (3.32) maka diperoleh

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{\lambda^2 + (1+r)S^*\lambda + rS^{*2}}{S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*}, \quad (3.45)$$

selanjutnya substitusikan Persamaan (3.45) ke (3.44) maka

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{\lambda^2 - rS^{*2}}{-\lambda^2 \left(\frac{\lambda^2 + (1+r)S^*\lambda + rS^{*2}}{S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*} \right) (S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} \\ &\quad - \frac{S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^* - \lambda S^*}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda}, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{\lambda^2 - rS^{*2}}{-\lambda^2(\lambda^2 + (1+r)S^*\lambda + rS^{*2})} \end{aligned}$$

$$+ \frac{-(rS^{*2} - S^*I^*)}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (3.46)$$

Selanjutnya akan dicari $\left. \frac{dRe(\lambda(\tau))}{d\tau} \right|_{\lambda=i\omega_0}$. Sebelumnya diketahui bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{dRe(\lambda)}{d\tau} + i \frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \\ \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{\left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} + i \frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right) \left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} - i \frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right)}{\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} - i \frac{dIm(\lambda)}{d\tau}}, \\ \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} &= \left(\left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right)^2 \right) \left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} - i \frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right)^{-1}, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} - i \frac{dIm(\lambda)}{d\tau}}{\left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right)^2}, \\ \Leftrightarrow Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{\frac{dRe(\lambda)}{d\tau}}{\left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right)^2}, \\ \Leftrightarrow Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \left(\left(\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dIm(\lambda)}{d\tau} \right)^2 \right) &= \frac{dRe(\lambda)}{d\tau}. \end{aligned}$$

Sehingga untuk menunjukkan bahwa $\frac{dRe(\lambda)}{d\tau} \neq 0$ maka harus ditunjukkan

bahwa $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \neq 0$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\omega_0} \\ &= Re \left(\frac{\lambda^2 - rS^{*2}}{-\lambda^2(\lambda^2 + (1+r)S^*\lambda + rS^{*2})} \right)_{\lambda=i\omega_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +Re \left(\frac{-(rS^{*2} - S^*I^*)}{\lambda^2(S^*\lambda + rS^{*2} - S^*I^*)} \right)_{\lambda=i\omega_0} \\
& = Re \left(\frac{(i\omega_0)^2 - rS^{*2}}{-(i\omega_0)^2((i\omega_0)^2 + (1+r)S^*(i\omega_0) + rS^{*2})} \right) \\
& +Re \left(\frac{-(rS^{*2} - S^*I^*)}{(i\omega_0)^2(S^*(i\omega_0) + rS^{*2} - S^*I^*)} \right) \\
& = Re \left(\frac{-\omega_0^2 - rS^{*2}}{\omega_0^2(-\omega_0^2 + (1+r)S^*(i\omega_0) + rS^{*2})} \right) \\
& +Re \left(\frac{-(rS^{*2} - S^*I^*)}{-\omega_0^2(S^*(i\omega_0) + rS^{*2} - S^*I^*)} \right) \\
& = Re \left(\left(\frac{-\omega_0^2 - rS^{*2}}{-\omega_0^4 + rS^{*2}\omega_0^2 + i(1+r)S^*\omega_0^3} \right) \left(\frac{-\omega_0^4 + rS^{*2}\omega_0^2 - i(1+r)S^*\omega_0^3}{-\omega_0^4 + rS^{*2}\omega_0^2 - i(1+r)S^*\omega_0^3} \right) \right) \\
& +Re \left(\left(\frac{-(rS^{*2} - S^*I^*)}{-rS^{*2}\omega_0^2 + S^*I^*\omega_0^2 - iS^*\omega_0^3} \right) \left(\frac{-rS^{*2}\omega_0^2 + S^*I^*\omega_0^2 + iS^*\omega_0^3}{-rS^{*2}\omega_0^2 + S^*I^*\omega_0^2 + iS^*\omega_0^3} \right) \right) \\
& = Re \left(\frac{\omega_0^6 - r^2S^{*4}\omega_0^2 + i(1+r)(S^*\omega_0^5 + rS^{*3}\omega_0^3)}{(-\omega_0^4 + rS^{*2}\omega_0^2)^2 + (1+r)^2S^{*2}\omega_0^6} \right) \\
& +Re \left(\frac{r^2S^{*4}\omega_0^2 - 2rS^{*3}I^*\omega_0^2 + S^{*2}I^{*2}\omega_0^2 + i(S^{*2}I^*\omega_0^3 - rS^{*3}\omega_0^3)}{(-rS^{*2}\omega_0^2 + S^*I^*\omega_0^2)^2 + (S^*\omega_0^3)^2} \right) \\
& = Re \left(\frac{\omega_0^2(\omega_0^4 - r^2S^{*4} + i(1+r)(S^*\omega_0^3 + rS^{*3}\omega_0))}{\omega_0^4(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2S^{*4} + (1+r)^2S^{*2}\omega_0^2)} \right) \\
& +Re \left(\frac{\omega_0^2(r^2S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + i(S^{*2}I^*\omega_0 - rS^{*3}\omega_0))}{\omega_0^4(r^2S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \right) \\
& = \frac{\omega_0^4 - r^2S^{*4}}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2S^{*4} + (1+r)^2S^{*2}\omega_0^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& = \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2}\omega_0^2)(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& = \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} - rS^{*2}I^* + rS^{*2}I^* + S^{*2}\omega_0^2)}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2}\omega_0^2)(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& = \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* - (r - I^*)S^{*2}I^* + rS^{*2}I^* + S^{*2}\omega_0^2)}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2}\omega_0^2)(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& = \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* - rS^{*3}I^* + rS^{*2}I^* + S^{*2}\omega_0^2)}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2}\omega_0^2)(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& = \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - 3rS^{*3}I^* + rS^{*2}I^* + S^{*2}\omega_0^2)}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2}\omega_0^2)(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& = \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - rS^{*3}I^* \left(3 - \frac{1}{S^*}\right) + S^{*2}\omega_0^2)}{\omega_0^2(\omega_0^4 - 2rS^{*2}\omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2}\omega_0^2)(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)} \\
& + \frac{r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2}}{\omega_0^2(r^2 S^{*4} - 2rS^{*3}I^* + S^{*2}I^{*2} + S^{*2}\omega_0^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - r S^{*3} I^* (3 - \mathcal{R}_0) + S^{*2} \omega_0^2)}{\omega_0^2 (\omega_0^4 - 2r S^{*2} \omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2} \omega_0^2) (r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)} \\
&+ \frac{r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2}}{\omega_0^2 (r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)} \\
&= \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} + \omega_0^4 + \omega_0^2 r^2 S^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)}{\omega_0^2 (\omega_0^4 - 2r S^{*2} \omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2} \omega_0^2) (r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)} \\
&+ \frac{r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2}}{\omega_0^2 (r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)} \\
&= \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4})(r^2 S^{*4} - 2\omega_0^2 r S^{*2} + \omega_0^4 + \omega_0^2 r^2 S^{*2} + 2\omega_0^2 r S^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)}{\omega_0^2 (\omega_0^4 - 2r S^{*2} \omega_0^2 + r^2 S^{*4} + (1+r)^2 S^{*2} \omega_0^2) (r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)} \\
&+ \frac{r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2}}{\omega_0^2 (r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} + S^{*2} \omega_0^2)} \\
&= \frac{(\omega_0^4 - r^2 S^{*4}) \left((r S^{*2} - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 (1+r)^2 S^{*2} \right)}{\omega_0^2 \left((r S^{*2} - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 (1+r)^2 S^{*2} \right) \left((r S^{*2} - S^* I^*)^2 + S^{*2} \omega_0^2 \right)} \\
&+ \frac{r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2}}{\omega_0^2 \left((r S^{*2} - S^* I^*)^2 + S^{*2} \omega_0^2 \right)} \\
&= \frac{\omega_0^4 - r^2 S^{*4} + r^2 S^{*4} - 2r S^{*3} I^* + S^{*2} I^{*2} - r S^{*2} I^* + r S^{*2} I^*}{\omega_0^2 \left((r S^{*2} - S^* I^*)^2 + S^{*2} \omega_0^2 \right)} \\
&= \frac{\omega_0^4 - 2r S^{*3} I^* - (-I + r) S^{*2} I^* + r S^{*2} I^*}{\omega_0^2 \left((r S^{*2} - S^* I^*)^2 + S^{*2} \omega_0^2 \right)} \\
&= \frac{\omega_0^4 - 2r S^{*3} I^* - r S^{*3} I^* + r S^{*2} I^*}{\omega_0^2 \left((r S^{*2} - S^* I^*)^2 + S^{*2} \omega_0^2 \right)} \\
&= \frac{\omega_0^4 - 3r S^{*3} I^* + r S^{*2} I^*}{\omega_0^2 \left((r S^{*2} - S^* I^*)^2 + S^{*2} \omega_0^2 \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0^4 + rS^{*3}I^* \left(\frac{1}{S^*} - 3 \right)}{\omega_0^2 \left((rS^{*2} - S^*I^*)^2 + S^{*2}\omega_0^2 \right)} \\
&= \frac{\omega_0^4 + rS^{*3}I^*(\mathcal{R}_0 - 3)}{\omega_0^2 \left((rS^{*2} - S^*I^*)^2 + S^{*2}\omega_0^2 \right)}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Jika $\mathcal{R}_0 > 3$ maka $\frac{dRe(\lambda(\tau))}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_0} \neq 0$. Jadi berdasarkan Teorema 2.3 maka titik ekuilibrium $E_+(S^*, I^*, R^*)$ mengalami bifurkasi Hopf pada saat $\tau = \tau_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

E. Bifurkasi Hopf

Pada sub-bab sebelumnya telah diperoleh, jika $\mathcal{R}_0 > 3$ maka terjadi bifurkasi Hopf pada titik ekuilibrium endemik E_+ saat $\tau = \tau_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Dimisalkan $\tau = \tau_0 + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. $\mu = 0$ adalah nilai bifurkasi Hopf. Selanjutnya kita akan mencari kestabilan sistem jika $\mu < 0$ dan $\mu > 0$. Didefinisikan $x_1(t) = S(\tau t) - S^*$, $x_2(t) = I(\tau t) - I^*$, $x_3(t) = R(\tau t) - R^*$. Akan diturunkan $x_1(t)$ terhadap t yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \tau \dot{S}(\tau t) \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau \left(-S(\tau t)I(\tau t - \tau) + r(1 - S(\tau t))S(\tau t) \right), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau \left(-S(\tau t)I(\tau(t - 1)) + rS(\tau t) - rS^2(\tau t) \right), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau \left(-S(\tau t)I(\tau(t - 1)) + (I^* + rS^*)S(\tau t) - rS^2(\tau t) \right), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau \left(-S(\tau t)I(\tau(t - 1)) + I^*S(\tau t) + rS^*S(\tau t) - rS^2(\tau t) \right), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau \left(-S(\tau t)I(\tau(t - 1)) + I^*S(\tau t) - r(S(\tau t) - S^*)S(\tau t) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau \left(-S(\tau t) (I(\tau(t-1)) - I^*) - rx_1(t)S(\tau t) \right), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau (-S(\tau t)x_2(t-1) - rx_1(t)S(\tau t) + S^*x_2(t-1) \\
&\quad - S^*x_2(t-1), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau (-x_2(t-1)(S(\tau t) - S^*) - rx_1(t)S(\tau t) - S^*x_2(t-1)), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau (-x_2(t-1)x_1(t) - rx_1(t)S(\tau t) - S^*x_2(t-1) + rx_1(t)S^* - \\
&\quad rx_1(t)S^*), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau (-x_1(t)x_2(t-1) - rx_1(t)(S(\tau t) - S^*) - S^*x_2(t-1) \\
&\quad - rx_1(t)S^*), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau (-x_1(t)x_2(t-1) - rx_1(t)x_1(t) - S^*x_2(t-1) - rx_1(t)S^*), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = \tau (x_1(t) + S^*) (-rx_1(t) - x_2(t-1)). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan diturunkan $x_2(t)$ terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_2(t) = \tau \dot{I}(\tau t) \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau (S(\tau t)I(\tau t - \tau) - \mu_1 I(\tau t) - \gamma I(\tau t)), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau (S(\tau t)I(\tau(t-1)) - (\mu_1 + \gamma)I(\tau t) - S^*I^* + S^*I^*), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau (S(\tau t)I(\tau(t-1)) - (\mu_1 + \gamma)I(\tau t) - S^*I^* + (\mu_1 + \gamma)I^*), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau (S(\tau t)I(\tau(t-1)) - (\mu_1 + \gamma)(I(\tau t) - I^*) - S^*I^* + I^*S(\tau t) \\
&\quad - I^*S(\tau t)), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau (S(\tau t)(I(\tau(t-1)) - I^*) - (\mu_1 + \gamma)x_2(t) + I^*(S(\tau t) - S^*)), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau (S(\tau t)x_2(t-1) - (\mu_1 + \gamma)x_2(t) + I^*x_1(t) + S^*x_2(t-1) - \\
&\quad S^*x_2(t-1), \\
&\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau ((S(\tau t) - S^*)x_2(t-1) - (\mu_1 + \gamma)x_2(t) + I^*x_1(t) + \\
&\quad S^*x_2(t-1)),
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \tau(x_1(t)x_2(t-1) - (\mu_1 + \gamma)x_2(t) + I^*x_1(t) + S^*x_2(t-1)), \quad (3.49)$$

dan akan diturunkan $x_3(t)$ terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= \tau \dot{R}(\tau t) \\ \Leftrightarrow \dot{x}_3(t) &= \tau(\gamma I(\tau t) - \mu_2 R(\tau t)), \\ \Leftrightarrow \dot{x}_3(t) &= \tau(\gamma I(\tau t) - \mu_2 R(\tau t) + \gamma I^* - \gamma I^*), \\ \Leftrightarrow \dot{x}_3(t) &= \tau(\gamma(I(\tau t) - I^*) - \mu_2 R(\tau t) + \mu_2 R^*), \\ \Leftrightarrow \dot{x}_3(t) &= \tau(\gamma x_2(t) - \mu_2(R(\tau t) - R^*)), \\ \Leftrightarrow \dot{x}_3(t) &= \tau(\gamma x_2(t) - \mu_2 x_3(t)). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Berdasarkan Persamaan (3.48), (3.49), dan (3.50) maka terbentuk sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \tau(x_1(t) + S^*)(-rx_1(t) - x_2(t-1)), \\ \dot{x}_2(t) &= \tau(I^*x_1(t) + x_1(t)x_2(t-1) - (\mu_1 + \gamma)x_2(t) + S^*x_2(t-1)), \\ \dot{x}_3(t) &= \tau(\gamma x_2(t) - \mu_2 x_3(t)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sistem (3.51) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\tau r S^* x_1(t) \\ \tau I^* x_1(t) - \tau(\mu_1 + \gamma)x_2(t) \\ \tau \gamma x_2(t) - \tau \mu_2 x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tau S^* x_2(t-1) \\ \tau S^* x_2(t-1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\tau x_1(t)x_2(t-1) - \tau r x_1^2(t) \\ \tau x_1(t)x_2(t-1) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Bagian linear dari Sistem (3.52) adalah sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau r S^* x_1(t) \\ \tau I^* x_1(t) - \tau(\mu_1 + \gamma)x_2(t) \\ \tau \gamma x_2(t) - \tau \mu_2 x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tau S^* x_2(t-1) \\ \tau S^* x_2(t-1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Akan dicari nilai eigen dari Sistem (3.53). Dimisalkan

$$\begin{pmatrix} q_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ q_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ q_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau r S^* x_1(t) \\ \tau I^* x_1(t) - \tau(\mu_1 + \gamma)x_2(t) \\ \tau \gamma x_2(t) - \tau \mu_2 x_3(t) \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$\begin{pmatrix} z_1(x_1(t), x_2(t-1), x_3(t)) \\ z_2(x_1(t), x_2(t-1), x_3(t)) \\ z_3(x_1(t), x_2(t-1), x_3(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau S^* x_2(t-1) \\ \tau S^* x_2(t-1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

serta dimisalkan juga

$$p_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1,$$

$$p_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2,$$

$$p_2(t-1) = x_2(t-1) - \hat{x}_2,$$

$$p_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3.$$

Akan dicari deret taylor dari q_1, q_2, q_3, z_1, z_2 , dan z_3 disekitar titik ekuilibrium

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & q_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ &= q_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial q_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_1(t)} (x_1(t) - \hat{x}_1) + \frac{\partial q_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_2(t)} (x_2(t) - \hat{x}_2) \\ & \quad + \frac{\partial q_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_3(t)} (x_3(t) - \hat{x}_3) + R_{q_1} \\ &= q_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) - \tau r S^* p_1(t) + R_{q_1} \\ &= -\tau r S^* p_1(t), \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} & q_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ &= q_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial q_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_1(t)} (x_1(t) - \hat{x}_1) + \frac{\partial q_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_2(t)} (x_2(t) - \hat{x}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial q_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_3(t)}(x_3(t) - \hat{x}_3) + R_{q_2} \\
& = q_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \tau I^* p_1(t) - \tau(\mu_1 + \gamma)p_2(t) + R_{q_2} \\
& = \tau I^* p_1(t) - \tau(\mu_1 + \gamma)p_2(t), \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\
& = q_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial q_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_1(t)}(x_1(t) - \hat{x}_1) + \frac{\partial q_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_2(t)}(x_2(t) - \hat{x}_2) \\
& \quad + \frac{\partial q_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_3(t)}(x_3(t) - \hat{x}_3) + R_{q_3} \\
& = q_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \tau \gamma p_2(t) - \tau \mu_2 p_3(t) + R_{q_3} \\
& = \tau \gamma p_2(t) - \tau \mu_2 p_3(t), \tag{3.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z_1(x_1(t), x_2(t-1), x_3(t)) \\
& = z_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial z_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_1(t)}(x_1(t) - \hat{x}_1) + \frac{\partial z_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_2(t-1)} \\
& \quad (x_2(t-1) - \hat{x}_2) + \frac{\partial z_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_3(t)}(x_3(t) - \hat{x}_3) + R_{z_1} \\
& = z_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) - \tau S^* p_2(t-1) + R_{z_1} \\
& = -\tau S^* p_2(t-1), \tag{3.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z_2(x_1(t), x_2(t-1), x_3(t)) \\
& = z_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial z_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_1(t)}(x_1(t) - \hat{x}_1) + \frac{\partial z_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_2(t-1)} \\
& \quad (x_2(t-1) - \hat{x}_2) + \frac{\partial z_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_3(t)}(x_3(t) - \hat{x}_3) + R_{z_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \tau S^* p_2(t-1) + R_{z_2} \\
&= \tau S^* p_2(t-1),
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
&z_3(x_1(t), x_2(t-1), x_3(t)) \\
&= z_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + \frac{\partial z_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_1(t)} (x_1(t) - \hat{x}_1) + \frac{\partial z_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_2(t-1)} \\
&\quad (x_2(t-1) - \hat{x}_2) + \frac{\partial z_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{\partial x_3(t)} (x_3(t) - \hat{x}_3) + R_{z_3} \\
&= z_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + R_{z_3} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Dari Persamaan (3.54), (3.55), (3.56), (3.57), (3.58), dan (3.59) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= -\tau r S^* p_1(t) - \tau S^* p_2(t-1), \\
\dot{p}_2(t) &= \tau I^* p_1(t) - \tau(\mu_1 + \gamma) p_2(t) + \tau S^* p_2(t-1), \\
\dot{p}_3(t) &= \tau \gamma p_2(t) - \tau \mu_2 p_3(t).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Misalkan solusi dari Sistem (3.60) adalah

$$p_1(t) = k_1 e^{\lambda t}, p_2(t) = k_2 e^{\lambda t}, p_3(t) = k_3 e^{\lambda t}. \tag{3.61}$$

Substitusikan Persamaan (3.61) ke (3.60) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
k_1 \lambda e^{\lambda t} &= -\tau r S^* k_1 e^{\lambda t} - \tau S^* k_2 e^{\lambda(t-1)}, \\
k_2 \lambda e^{\lambda t} &= \tau I^* k_1 e^{\lambda t} - \tau(\mu_1 + \gamma) k_2 e^{\lambda t} + \tau S^* k_2 e^{\lambda(t-1)}, \\
k_3 \lambda e^{\lambda t} &= \tau \gamma k_2 e^{\lambda t} - \tau \mu_2 k_3 e^{\lambda t}.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Sistem (3.62) dibagi dengan $e^{\lambda t}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
k_1 \lambda &= -\tau r S^* k_1 - \tau S^* k_2 e^{-\lambda}, \\
k_2 \lambda &= \tau I^* k_1 - \tau(\mu_1 + \gamma) k_2 + \tau S^* k_2 e^{-\lambda}, \\
k_3 \lambda &= \tau \gamma k_2 - \tau \mu_2 k_3.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Sistem (3.63) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} k_1 \lambda \\ k_2 \lambda \\ k_3 \lambda \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} -rS^* & -S^*e^{-\lambda} & 0 \\ I^* & -(\mu_1 + \gamma) + S^*e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} k_1 \lambda \\ k_2 \lambda \\ k_3 \lambda \end{bmatrix} = (\tau_0 + \mu) \begin{bmatrix} -rS^* & -S^*e^{-\lambda} & 0 \\ I^* & -(\mu_1 + \gamma) + S^*e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

Jika $\mu = 0$ maka terdapat nilai eigen imajiner murni $\lambda = \pm i\omega_0\tau_0$, hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} k_1 \lambda \\ k_2 \lambda \\ k_3 \lambda \end{bmatrix} = \tau_0 \begin{bmatrix} -rS^* & -S^*e^{-\lambda} & 0 \\ I^* & -(\mu_1 + \gamma) + S^*e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut:

$$\begin{vmatrix} -\tau_0 rS^* - \lambda & -\tau_0 S^*e^{-\lambda} & 0 \\ \tau_0 I^* & -\tau_0(\mu_1 + \gamma) + \tau_0 S^*e^{-\lambda} - \lambda & 0 \\ 0 & \tau_0 \gamma & -\tau_0 \mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\tau_0 rS^* - \lambda)(-\tau_0(\mu_1 + \gamma) + \tau_0 S^*e^{-\lambda} - \lambda)(-\tau_0 \mu_2 - \lambda)$$

$$-(-\tau_0 \mu_2 - \lambda)(\tau_0 I^*)(-\tau_0 S^*e^{-\lambda}) = 0,$$

$$\Leftrightarrow (-\tau_0 \mu_2 - \lambda)(\lambda^2 + (\tau_0 rS^* + \tau_0(\mu_1 + \gamma) - \tau_0 S^*e^{-\lambda})\lambda + \tau_0^2 rS^*(\mu_1 + \gamma)$$

$$- \tau_0^2 rS^{*2}e^{-\lambda} + \tau_0^2 S^*I^*e^{-\lambda}) = 0. \quad (3.64)$$

Dari Persamaan (3.64) maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut $\lambda = -\tau_0 \mu_2$ dan akar persamaan

$$\lambda^2 + (\tau_0 rS^* + \tau_0(\mu_1 + \gamma) - \tau_0 S^*e^{-\lambda})\lambda + \tau_0^2 rS^*(\mu_1 + \gamma) - \tau_0^2 rS^{*2}e^{-\lambda}$$

$$+ \tau_0^2 S^*I^*e^{-\lambda} = 0. \quad (3.65)$$

Misal akar dari Persamaan (3.65) adalah $\lambda = i\omega_0\tau_0$. Selanjutnya akan disubstitusikan $\lambda = i\omega_0\tau_0$ ke Persamaan (3.65) sehingga diperoleh

$$\lambda^2 + (\tau_0 rS^* + \tau_0(\mu_1 + \gamma) - \tau_0 S^*e^{-\lambda})\lambda + \tau_0^2 rS^*(\mu_1 + \gamma) - \tau_0^2 rS^{*2}e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& +\tau_0^2 S^* I^* e^{-\lambda} = 0 \\
& \Leftrightarrow (i\omega_0 \tau_0)^2 + (\tau_0 r S^* + \tau_0 (\mu_1 + \gamma) - \tau_0 S^* e^{-i\omega_0 \tau_0}) i\omega_0 \tau_0 + \tau_0^2 r S^* (\mu_1 + \gamma) \\
& \quad - \tau_0^2 r S^{*2} e^{-i\omega_0 \tau_0} + \tau_0^2 S^* I^* e^{-i\omega_0 \tau_0} = 0, \\
& \Leftrightarrow -\omega_0^2 \tau_0^2 + i\omega_0 \tau_0^2 r S^* + i\omega_0 \tau_0^2 (\mu_1 + \gamma) - i\omega_0 \tau_0^2 S^* (\cos \omega_0 \tau_0 - i \sin \omega_0 \tau_0) \\
& \quad + \tau_0^2 r S^* (\mu_1 + \gamma) - \tau_0^2 r S^{*2} (\cos \omega_0 \tau_0 - i \sin \omega_0 \tau_0) + \tau_0^2 S^* I^* \\
& \quad (\cos \omega_0 \tau_0 - i \sin \omega_0 \tau_0) = 0, \\
& \Leftrightarrow (-\omega_0^2 \tau_0^2 - \omega_0 \tau_0^2 S^* \sin \omega_0 \tau_0 + \tau_0^2 r S^* (\mu_1 + \gamma) - \tau_0^2 r S^{*2} \cos \omega_0 \tau_0 + \\
& \quad \tau_0^2 S^* I^* \cos \omega_0 \tau_0) + i(\omega_0 \tau_0^2 r S^* + \omega_0 \tau_0^2 (\mu_1 + \gamma) - \omega_0 \tau_0^2 S^* \cos \omega_0 \tau_0 + \\
& \quad \tau_0^2 r S^{*2} \sin \omega_0 \tau_0 - \tau_0^2 S^* I^* \sin \omega_0 \tau_0) = 0,
\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
-\omega_0^2 \tau_0^2 + \tau_0^2 r S^* (\mu_1 + \gamma) &= \omega_0 \tau_0^2 S^* \sin \omega_0 \tau_0 + \tau_0^2 r S^{*2} \cos \omega_0 \tau_0 \\
&\quad - \tau_0^2 S^* I^* \cos \omega_0 \tau_0,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

dan

$$\begin{aligned}
\omega_0 \tau_0^2 r S^* + \omega_0 \tau_0^2 (\mu_1 + \gamma) &= \omega_0 \tau_0^2 S^* \cos \omega_0 \tau_0 - \tau_0^2 r S^{*2} \sin \omega_0 \tau_0 \\
&\quad + \tau_0^2 S^* I^* \sin \omega_0 \tau_0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Selanjutnya kuadratkan Persamaan (3.66) dan (3.67) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega_0^4 \tau_0^4 - 2\omega_0^2 \tau_0^4 r S^* (\mu_1 + \gamma) + \tau_0^4 r^2 S^{*2} (\mu_1 + \gamma)^2 &= \omega_0^2 \tau_0^4 S^{*2} \cos^2 \omega_0 \tau_0 + \\
2\omega_0 \tau_0^4 r S^{*3} \sin \omega_0 \tau_0 \cos \omega_0 \tau_0 - 2\omega_0 \tau_0^4 S^{*2} I^* \sin \omega_0 \tau_0 \cos \omega_0 \tau_0 + \\
\tau_0^4 r^2 S^{*4} \cos^2 \omega_0 \tau_0 - 2\tau_0^4 r S^{*3} I^* \cos^2 \omega_0 \tau_0 + \tau_0^4 S^{*2} I^{*2} \cos^2 \omega_0 \tau_0,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

dan

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 \tau_0^4 r^2 S^{*2} + 2\omega_0^2 \tau_0^4 r S^* (\mu_1 + \gamma) + \omega_0^2 \tau_0^4 (\mu_1 + \gamma)^2 &= \omega_0^2 \tau_0^4 S^{*2} \cos^2 \omega_0 \tau_0 - \\
2\omega_0 \tau_0^4 r S^{*3} \sin \omega_0 \tau_0 \cos \omega_0 \tau_0 + 2\omega_0 \tau_0^4 S^{*2} I^* \sin \omega_0 \tau_0 \cos \omega_0 \tau_0 +
\end{aligned}$$

$$\tau_0^4 r^2 S^{*4} \sin^2 \omega_0 \tau_0 - 2\tau_0^4 r S^{*3} I^* \sin^2 \omega_0 \tau_0 + \tau_0^4 S^{*2} I^{*2} \sin^2 \omega_0 \tau_0. \quad (3.69)$$

Lalu Persamaan (3.68) dan (3.69) dijumlahkan sehingga diperoleh

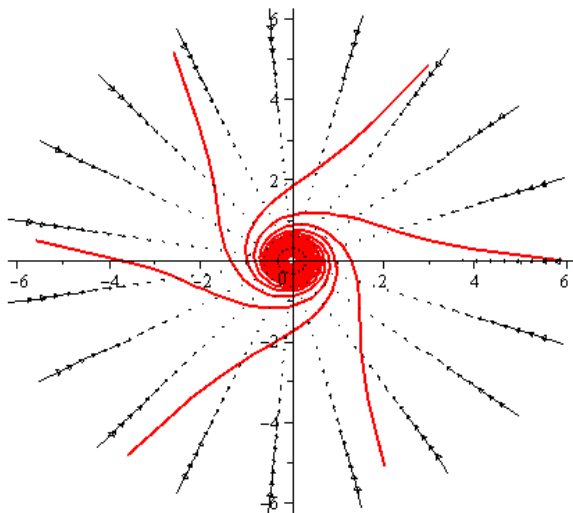
$$\begin{aligned} & \omega_0^4 \tau_0^4 + \omega_0^2 \tau_0^4 r^2 S^{*2} + \tau_0^4 r^2 S^{*2} (\mu_1 + \gamma)^2 + \omega_0^2 \tau_0^4 (\mu_1 + \gamma)^2 \\ &= \omega_0^2 \tau_0^4 S^{*2} + \tau_0^4 r^2 S^{*4} - 2\tau_0^4 r S^{*3} I^* + \tau_0^4 S^{*2} I^{*2} \\ &\Leftrightarrow \omega_0^4 \tau_0^4 + \omega_0^2 \tau_0^4 r^2 S^{*2} + \tau_0^4 r^2 S^{*2} (\mu_1 + \gamma)^2 + \omega_0^2 \tau_0^4 (\mu_1 + \gamma)^2 - \omega_0^2 \tau_0^4 S^{*2} \\ &\quad - \tau_0^4 r^2 S^{*4} + 2\tau_0^4 r S^{*3} I^* - \tau_0^4 S^{*2} I^{*2} = 0, \\ &\Leftrightarrow \tau_0^4 (\omega_0^4 + \omega_0^2 r^2 S^{*2} + r^2 S^{*2} (\mu_1 + \gamma)^2 + \omega_0^2 (\mu_1 + \gamma)^2 - \omega_0^2 S^{*2} - r^2 S^{*4} \\ &\quad + 2r S^{*3} I^* - S^{*2} I^{*2}) = 0, \\ &\Leftrightarrow \omega_0^4 + \omega_0^2 (r^2 S^{*2} + (\mu_1 + \gamma)^2 - S^{*2}) + r^2 S^{*2} (\mu_1 + \gamma)^2 - r^2 S^{*4} \\ &\quad + 2r S^{*3} I^* - S^{*2} I^{*2} = 0, \\ &\Leftrightarrow \omega_{0,1,2}^2 = \frac{-(r^2 S^{*2} + (\mu_1 + \gamma)^2 - S^{*2}) \pm \sqrt{(r^2 S^{*2} + (\mu_1 + \gamma)^2 - S^{*2})^2 - 4(r^2 S^{*2} (\mu_1 + \gamma)^2 - r^2 S^{*4} + 2r S^{*3} I^* - S^{*2} I^{*2})}}{2}, \end{aligned}$$

sehingga terdapat bilangan real ω_0 yang memenuhi Persamaan (3.65). Jadi $\pm i\omega_0 \tau_0$ adalah akar Persamaan (3.65).

Berdasarkan perhitungan menggunakan Maple (lihat Lampiran 2 dan 3), jika $\mu \neq 0$ maka terdapat nilai eigen kompleks $\lambda = \eta + i\kappa$ dan dari Sistem (3.52) dengan menggunakan Maple (lihat Lampiran 1) diperoleh Sistem \dot{u} . Selanjutnya dari Sistem \dot{u} dengan menggunakan Maple (lihat Lampiran 4) diperoleh \dot{r} . Saat $\mu < 0$ diperoleh

$$\dot{r} = -0,003599174267 r(t) - 0,2537681559 r(t)^3. \quad (3.70)$$

Sehingga diperoleh gambar solusi dari Persamaan (3.70) untuk beberapa nilai awal dan medan arahnya (lihat Lampiran 4) yaitu sebagai berikut:



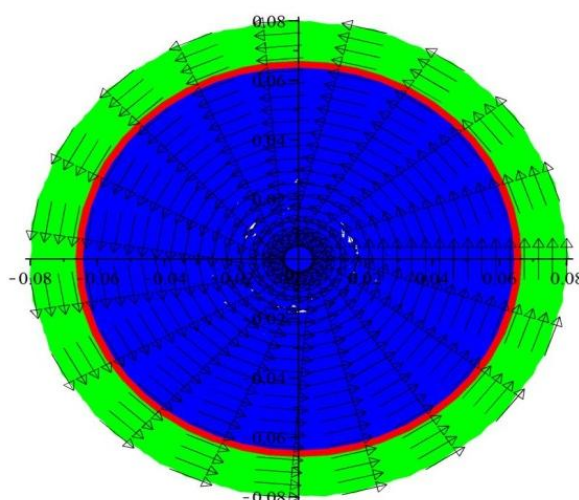
Gambar 7. Solusi Sistem saat $\mu < 0$

Berdasarkan Gambar 7, terlihat bahwa saat $\mu < 0$ solusi sistem untuk sebarang nilai awal yang diambil maka akan bergerak menuju titik 0 sehingga sistem stabil asimtotik.

Saat $\mu > 0$ diperoleh persamaan berikut:

$$\dot{r} = 0,002603545397 r(t) - 0,5943829471 r(t)^3. \quad (3.71)$$

Sehingga diperoleh gambar solusi dari Persamaan (3.71) untuk beberapa nilai awal dan medan arahnya (lihat Lampiran 4) yaitu sebagai berikut:



Gambar 8. Solusi Sistem saat $\mu > 0$

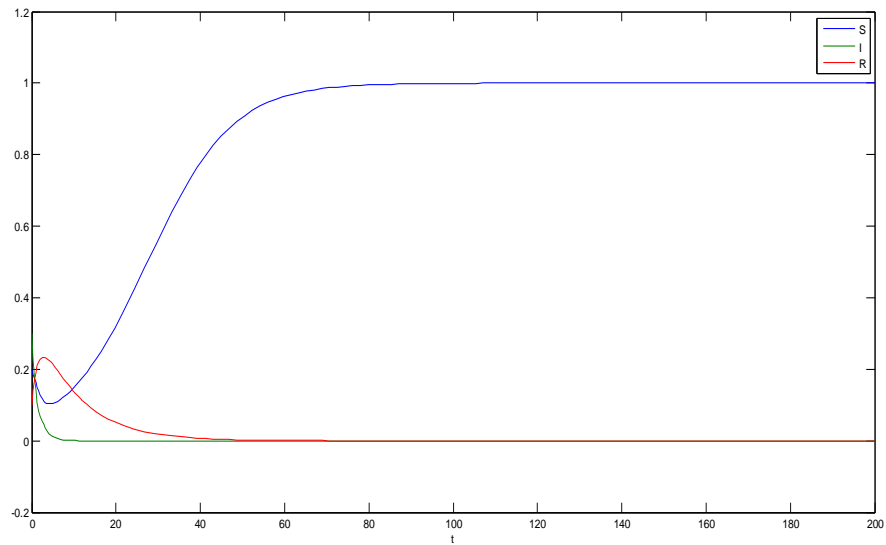
Dari Gambar 8 tidak terlihat apakah solusi sistem untuk nilai-nilai awal di dalam lingkaran maupun di luar lingkaran akan bergerak menuju lingkaran atau bergerak menjauhi lingkaran karena koefisien $r(t)$ dan $r(t)^3$ yang kecil. Namun berdasarkan subbab sebelumnya mengenai bifurkasi Hopf (Persamaan (2.35)), solusi sistem untuk nilai-nilai awal di dalam lingkaran maupun di luar lingkaran akan bergerak menuju lingkaran. Sistem stabil asimtotik saat $\mu < 0$ dan sistem membentuk orbit periodik saat $\mu > 0$. Jadi bifurkasi Hopf terjadi saat $\mu = 0$.

F. Simulasi Numerik

Sistem (3.11) dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Matlab yaitu sebagai berikut:

1. Kasus $\mathcal{R}_0 < 1$

Diberikan nilai-nilai parameter untuk Sistem (3.6) yaitu sebagai berikut $\beta = 0,01$, $K = 100$, $r = 0.1$, $\mu_1 = 0,55$, $\mu_2 = 0,1$, dan $\gamma = 0,55$. Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Sistem (3.6) maka diperoleh nilai-nilai parameter untuk Sistem (3.11) adalah sebagai berikut $r = 0.1$, $\mu_1 = 0,55$, $\mu_2 = 0,1$, dan $\gamma = 0,55$, sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{1,1} < 1$. Dengan demikian dengan menggunakan Matlab (lihat Lampiran 5) diperoleh



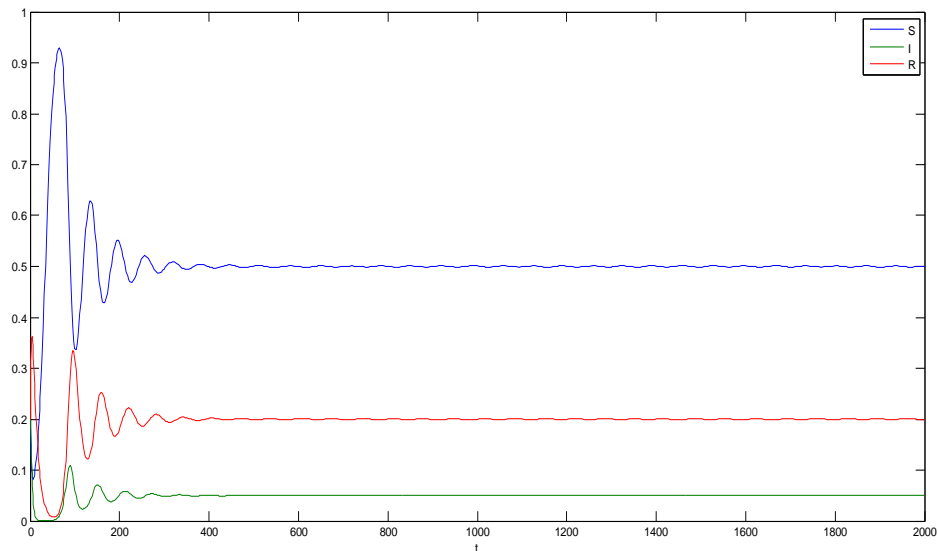
Gambar 9. Simulasi Sistem (3.11) untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ dengan Nilai Awal $(0,2, 0,3, 0,1)$ dan $\tau = 2,5$

Berdasarkan Gambar 9, terlihat bahwa semakin lama penyakit akan menghilang dari populasi yaitu jumlah individu yang terinfeksi akan menuju nol sehingga berakibat jumlah individu yang sembuh juga akan menuju nol, sedangkan jumlah individu yang rentan akan menuju ke 1. Sistem (3.11) merupakan bentuk penyederhanaan dari Sistem (3.6), karena definisi $\tilde{S} = \frac{S}{K}$ maka jumlah individu yang rentan akan menuju ke 100 yang merupakan *carrying capacity* (kapasitas batas).

2. Kasus $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$

Diberikan nilai-nilai parameter Sistem (3.6) sebagai berikut $\beta = 0,01$, $K = 100$, $r = \mu_1 = \mu_2 = 0,1$, dan $\gamma = 0,4$ (Wang, 2010: 2400). Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut maka Sistem (3.11) memiliki nilai-nilai parameter sebagai berikut $r = \mu_1 = \mu_2 = 0,1$, dan $\gamma = 0,4$, sehingga Sistem (3.11) memiliki titik ekuilibrium endemik $E_+ =$

$(0,5, 0,05, 0,2)$, dan $1 < \mathcal{R}_0 = 2 \leq 3$. Dengan menggunakan Matlab (lihat Lampiran 6) diperoleh

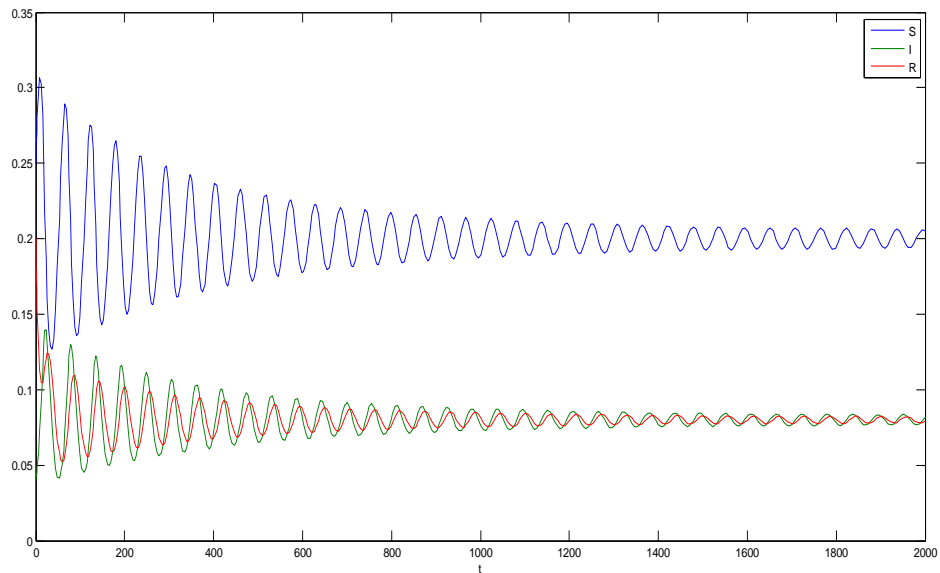


Gambar 10. Simulasi Sistem (3.11) untuk $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$ dengan Nilai Awal $(0,2, 0,3, 0,2)$ dan $\tau = 2,5$

Berdasarkan Gambar 10, terlihat solusi dari Sistem (3.11) dengan nilai awal $(0,2, 0,3, 0,2)$ yang diambil disekitar titik $E_+ = (0,5, 0,05, 0,2)$ semakin lama akan menuju ke $E_+ = (0,5, 0,05, 0,2)$. Sehingga penyakit akan tetap ada dalam daerah penyebaran penyakit, untuk waktu tertentu jumlah individu yang rentan, individu yang terinfeksi, dan individu yang sembuh dapat diperkirakan. Dari titik ekuilibrium $E_+ = (0,5, 0,05, 0,2)$ maka untuk waktu yang lama diperoleh perkiraan jumlah individu yang rentan, individu yang terinfeksi, dan individu yang sembuh yaitu sebanyak 50 orang, 5 orang, dan 20 orang. Dengan mengetahui perkiraan jumlah individu tersebut maka diharapkan dapat dilakukan pengendalian penyebaran penyakit dengan tepat.

3. Kasus $\mathcal{R}_0 > 3$

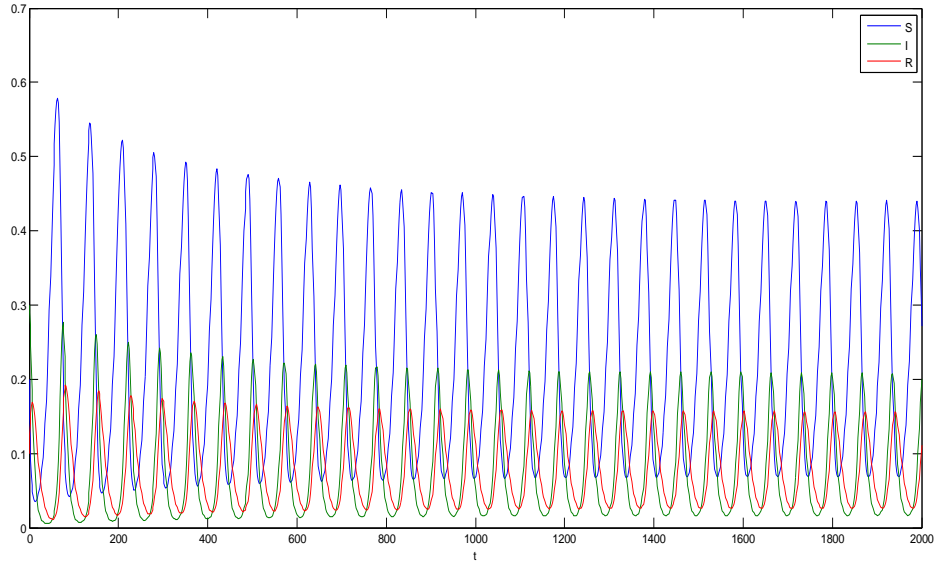
Diberikan nilai-nilai parameter Sistem (3.6) sebagai berikut $\beta = 0,01$, $K = 100$, $r = \mu_1 = \mu_2 = \gamma = 0,1$ (Wang, 2010: 2400). Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut maka Sistem (3.11) memiliki nilai-nilai parameter sebagai berikut $r = \mu_1 = \mu_2 = \gamma = 0,1$, sehingga Sistem (3.11) memiliki titik ekuilibrium endemik $E_+ = (0,2, 0,08, 0,08)$, $\mathcal{R}_0 = 5 > 3$, dan $\tau_0 = 2,0842$. Dengan menggunakan Matlab (lihat Lampiran 7) diperoleh



Gambar 11. Simulasi Sistem (3.11) untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ dengan Nilai Awal (0,25, 0,04, 0,2) dan $\tau = 1,2$

Berdasarkan Gambar 11, terlihat bahwa saat diambil $\tau = 1,2 < \tau_0 = 2,0842$, solusi Sistem (3.11) dengan nilai awal (0,25, 0,04, 0,2) semakin lama akan menuju ke titik $E_+ = (0,2, 0,08, 0,08)$. Sehingga diperkirakan jumlah individu terinfeksi yang tetap ada dalam daerah penyebaran penyakit yaitu sebanyak 8 orang.

Namun ketika diambil $\tau = 2,5 > 2,0842$, dengan menggunakan Matlab (lihat Lampiran 8) diperoleh



Gambar 12. Simulasi Sistem (3.11) untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ dengan Nilai Awal (0,2, 0,3, 0,1) dan $\tau = 2,5$

Berdasarkan Gambar 12, terlihat bahwa titik ekuilibrium endemik $E_+ = (0,2, 0,08, 0,08)$ tidak stabil.

G. Interpretasi Solusi

Berdasarkan simulasi sistem terlihat bahwa ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ (setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit kepada rata-rata kurang dari satu individu rentan) maka pada akhirnya penyakit akan menghilang dari populasi. Sedangkan ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ (setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit kepada rata-rata lebih dari satu individu rentan) maka penyakit akan tetap ada dalam daerah penyebaran penyakit. Saat $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$ penyakit akan menyebar dan untuk waktu tertentu jumlah individu rentan, individu terinfeksi, dan individu sembuh akan tetap. Oleh karena itu, untuk

waktu tertentu dapat diperkirakan jumlah individu yang terinfeksi yang selalu ada pada daerah penyakit menyebar tersebut, sehingga diharapkan dapat dilakukan pengendalian penyebaran penyakit dengan tepat.

Sedangkan untuk $\mathcal{R}_0 > 3$, ketika suatu penyakit memiliki waktu tunda $\tau = 1,2 < 2,0842$ (waktu saat individu tertular penyakit sampai individu dapat menularkan penyakit kurang dari 2,0842 satuan waktu) maka penyakit akan menyebar dan untuk waktu tertentu jumlah individu terinfeksi yang berada dalam daerah penyebaran penyakit akan tetap. Namun ketika waktu tunda penyakit $\tau = 2,5 > 2,0842$ (waktu saat individu mulai tertular penyakit sampai individu dapat menularkan penyakit lebih dari 2,0842 satuan waktu) maka titik ekuilibrium endemik tidak stabil yaitu penyakit akan menyebar, namun jumlah individu yang terinfeksi tidak dapat diperkirakan karena jumlahnya berubah-ubah.

BAB IV PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model SIR dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear memiliki 2 jenis titik ekuilibrium yaitu dua buah titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (0,0,0)$ dan $E_1 = (1,0,0)$ serta sebuah titik ekuilibrium endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ dengan $S^* = \mu_1 + \gamma$, $I^* = r(1 - (\mu_1 + \gamma))$, dan $R^* = \frac{\gamma}{\mu_2} I^*$. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1 = (1,0,0)$ stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Kestabilan titik ekuilibrium endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ stabil asimtotik lokal jika $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$, sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 3$ terjadi bifurkasi Hopf pada saat $\tau = \tau_n, n = 0, 1, 2, \dots$
2. Model SIR dengan waktu tunda dan laju penularan bilinear dapat diubah dalam bentuk sistem persamaan yang bergantung pada parameter μ dengan $\mu = \tau - \tau_0$. Perubahan nilai parameter μ menyebabkan terjadinya bifurkasi Hopf pada sistem yaitu saat $\mu < 0$ sistem stabil sedangkan saat $\mu > 0$ terbentuk orbit periodik.

B. Saran

Berdasarkan hasil penulisan skripsi ini, penulis memberikan saran:

1. Dalam skripsi ini terdapat teorema yang belum dibuktikan oleh penulis maka diharapkan peneliti selanjutnya dapat mencari bukti teorema tersebut guna menunjang analisis selanjutnya.
2. Pembaca dapat membahas kestabilan global untuk titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 ketika $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 1991. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi ke-5. (Alih Bahasa: Pantur Silaban & I Nyoman Susila). Jakarta: Erlangga.
- Bartle, R. G. 2011. *Introduction to Real Analysis*. 4th. New York: John Wiley & Sons.
- Blanchard, P., Devaney, R.L., & Hall, G.R. 2012. *Differential Equations*. 4th. Boston: Brooks/Cole.
- Driessche, P. van den & Watmough, J. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Bioscience*. 180 (2002). Hlm. 29-48.
- Guckenheimer, J., & Holmes, P. 1985. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer.
- Kar, T. K. 2003. Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*. 38 (2003). Hlm. 449-458.
- Kermack, W. O. & McKendrick, A. G. 1927. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Mathematical and Physical Character*. 115 (1927). Hlm. 700-721.
- Kuznetsov, Y. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory*. New York: Springer.
- Luenberger, D. G. 1979. *Introduction to Dynamic System*. Canada: Simultaneously.
- Ma, Wanbiao, Song, M. & Takeuchi, Y. 2004. Global Stability of an SIR Epidemic Model with Time Delay. *Applied Mathematics Letter*. 17 (2004). Hlm. 1141-1145.
- Olsder, G. J & Woude, J. W. van der. 2004. *Mathematical System Theory*. Netherland: VVSD.
- Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical System*. 3rd. New York: Springer.
- Ross, L. 1984. *Differential Equations*. 3rd. New York: Springer.
- Smith, Hal. 2011. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. New York: Springer.

- Ullah, Roman, dkk. 2013. Stability Analysis of a General SIR Epidemic Model. *VFAST Transactions on Mathematics*. 1 (2013). Hlm. 16-20.
- Wahyudin Rajab. 2008. *Epidemiologi untuk Mahasiswa Kebidanan*. Jakarta: Kedokteran EGC.
- Wang, J.J., Zhang, J.Z., & Jin, Z. 2010. Analysis of an SIR Model with Bilinear Incidence Rate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 11 (2010). Hlm. 2390-2402.
- Widowati & Sutimin. 2007. *Pemodelan Matematika*. Semarang: Fakultas MIPA Universitas Diponegoro.
- Wiggins, Stephen. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. 2nd. New York: Springer.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Maple Bentuk Sistem \dot{u}

Dimisalkan $r = \chi$, $S^* = \epsilon$, dan $I^* = \rho$

```
> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
> A0 := (tau_0 + mu) · matrix(2, 2, [[-chi·epsilon, 0], [rho, -(mu_1
    + gamma)]]);
> A1 := (tau_0 + mu) · matrix(2, 2, [[0, -epsilon], [0, epsilon]]);
> ident := evalm(array(1..2, 1..2, identity));
> Delta := evalm(A0 + A1 · exp(-lambda) - lambda · ident);
> char_eq := collect(det(Delta), lambda) :
> eq_im := evalc(subs(lambda = η + I·x, char_eq)) : eq_Re
    := coeff(eq_im, I, 0) : eq_Im := coeff(eq_im, I, 1) :
```

Akan dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen lambda sehingga diperoleh basis Φ

```
> v := matrix([[v1], [v2]]) : Dv := subs(lambda = η + I·x,
    evalm(multiply(Delta, v))) : v2res := v2 = solve(Dv[1, 1], v2) :
> yy := map(evalc, subs(v2res, v1 = 1, evalm(exp((η + I·x) · theta)
    · v))) : Phi := array(1..2, 1..2, [[coeff(yy[1, 1], I, 0),
    coeff(yy[1, 1], I, 1)], [coeff(yy[2, 1], I, 0), coeff(yy[2, 1], I,
    1])]) :
```

Selanjutnya didefinisikan matriks u dan Φu

```
> u := matrix([[u1], [u2]]) : Phi_u := multiply(Phi, u) :
```

Didefinisikan matriks $B = \text{diag}[\lambda]$

```
> B := matrix([[η, -x], [x, η]]) :
```

Akan dicari basis Ψ untuk vektor eigen dari sistem transposnya

```
> w := array(1..2) : wD := subs(lambda = η + I·x, multiply(w,
    Delta)) : w2res := w[2] = solve(wD[1], w[2]) : yyy
    := map(evalc, subs(w2res, w[1] = 1, lambda = η + I·x,
    evalm(w · exp(-lambda · xi)))) : Psi_g := array(1..2, 1..2,
    [[coeff(yyy[1], I, 0), coeff(yyy[2], I, 0)], [coeff(yyy[1], I, 1),
    coeff(yyy[2], I, 1)]] :
> bilinear_form := proc(rowv, colv) local pstemp; pstemp := subs(xi
    = 0, theta = 0, innerprod(rowv, colv)) + int(subs(xi = sigma
    + 1, theta = sigma, innerprod(rowv, A1, colv)), sigma = -1..0);
    RETURN(pstemp) end;
```

```

> rowvec := array(1..2) : colvec := array(1..2) : produit
:= matrix(2, 2) :

> for I1 from 1 to 2 do for I2 from 1 to 2 do rowvec := row(Psi_g,
I1); colvec := col(Phi, I2); produit[I1, I2]
:= eval(bilinear_form(rowvec, colvec)) : od:od:

> K := inverse(produit) :
> PPsi := map(simplify, multiply(K, Psi_g)) :
> Psi0 := matrix(2, 2) : Psi0_res := map(simplify, map(eval, subs(xi
= 0, evalm(PPsi)))) : Psi0_vals := [Psi0[1, 1] = Psi0_res[1, 1],
Psi0[1, 2] = Psi0_res[1, 2], Psi0[2, 1] = Psi0_res[2, 1], Psi0[2, 2]
= Psi0_res[2, 2]] :

```

Selanjutnya didefinisikan h sebagai berikut

```

> h := matrix([[h1_11(theta)·u12 + h1_12(theta)·u1·u2
+ h1_22(theta)·u22], [h2_11(theta)·u12 + h2_12(theta)·u1
·u2 + h2_22(theta)·u22]]);

```

Didefinisikan bagian linear dan bagian nonlinear dari sistem

```

> x := matrix([[x1], [x2]]) : xt := matrix([[x1t], [x2t]]) : lin
:= evalm(multiply(A0, x) + multiply(A1, xt)); f1 := (tau0
+ mu)·(-x1·x2t - chi·x12) : f2 := (tau0 + mu)·x1·x2t :
nonlin := matrix([[f1], [f2]]);

```

Diperoleh x_ce yaitu koordinat u untuk titik pada center eigenspace, x_cm yaitu koordinat u untuk titik pada center manifold, dan x_h yaitu koordinat u untuk titik pada bentuk nonlinear center manifold

```

> Phiu0 := map(eval, subs(theta = 0, evalm(Phiu))) : Phiut
:= map(eval, subs(theta = -1, evalm(Phiu))) : x_ce := [x1
= Phiu0[1, 1], x2 = Phiu0[2, 1], x1t = Phiut[1, 1], x2t = Phiut[2,
1]] : h0 := map(eval, subs(theta = 0, evalm(h))) : ht
:= map(eval, subs(theta = -1, evalm(h))) : x_cm := [x1
= Phiu0[1, 1] + h0[1, 1], x2 = Phiu0[2, 1] + h0[2, 1], x1t
= Phiut[1, 1] + ht[1, 1], x2t = Phiut[2, 1] + ht[2, 1]] : x_h
:= [x1 = h0[1, 1], x2 = h0[2, 1], x1t = ht[1, 1], x2t = ht[2, 1]] :

```

Turunan h terhadap theta

```

> delhs := map(diff, h, theta) :

```

Turunan h terhadap u

```

> dhdu := matrix([[diff(h[1, 1], u1), diff(h[1, 1], u2)], [diff(h[2, 1],
u1), diff(h[2, 1], u2)]]):

> derhs := map(collect, map(expand, evalm(multiply(dhdu,
multiply(B, u)) + multiply(Phi, multiply(Psi0, [subs(x_ce, f1),
subs(x_ce, f2)]))))), [u1, u2], distributed, factor) :

```

Selanjutnya akan dicari nilai h

```

> hdes := evalm(delhs - derhs) :
>
de1 := coeff(coeff(hdes[1,1],u1^2),u2,0) : de2
      := coeff(coeff(hdes[1,1],u1),u2) : de3
      := coeff(coeff(hdes[1,1],u2^2),u1,0) : de4
      := coeff(coeff(hdes[2,1],u1^2),u2,0) : de5
      := coeff(coeff(hdes[2,1],u1),u2) : de6
      := coeff(coeff(hdes[2,1],u2^2),u1,0) :

> des := {de1,de2,de3,de4,de5,de6} : fns := {coeff(h[1,1],u1^2),
      coeff(coeff(h[1,1],u1),u2),coeff(h[1,1],u2^2),coeff(h[2,
      1],u1^2),coeff(coeff(h[2,1],u1),u2),coeff(h[2,1],u2^2)} :

> temp := dsolve(des,fns) : changeC := [_C1 = C1, _C2 = C2, _C3
      = C3, _C4 = C4, _C5 = C5, _C6 = C6] : hsoln
      := simplify(expand(evalc(subs(changeC,value(temp))))) :

>
collect(hsoln[1],[Psi0[1,1],Psi0[1,2],Psi0[2,1],Psi0[2,2],p1,p2],
factor) : collect(hsoln[2],[Psi0[1,1],Psi0[1,2],Psi0[2,1],Psi0[2,
2],p1,p2],factor) : collect(hsoln[3],[Psi0[1,1],Psi0[1,2],
Psi0[2,1],Psi0[2,2],p1,p2],factor) : collect(hsoln[4],[Psi0[1,
1],Psi0[1,2],Psi0[2,1],Psi0[2,2],p1,p2],factor) :
collect(hsoln[5],[Psi0[1,1],Psi0[1,2],Psi0[2,1],Psi0[2,2],p1,
p2],factor) : collect(hsoln[6],[Psi0[1,1],Psi0[1,2],Psi0[2,1],
Psi0[2,2],p1,p2],factor) :

> hsoln0 := simplify(eval(subs(theta=0,hsoln))) : hsolnt
      := simplify(eval(subs(theta=-1,hsoln))) :

> bclhs := map(eval,subs(theta=0,evalm(derhs))) : bcrhs
      := map(collect,evalm(subs(x_h,evalm(lin))+subs(x_ce,
      evalm(nonlin))),[u1,u2]) :

>
consts := [C1,C2,C3,C4,C5,C6] : bceq := subs(hsoln0,hsolnt,
      evalm(bclhs - bcrhs)) : bc1 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1],u1,2),u2,0),consts) : bc2 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1],u1,1),u2,1),consts) : bc3 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1],u1,0),u2,2),consts) : bc4 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1],u1,2),u2,0),consts) : bc5 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1],u1,1),u2,1),consts) : bc6 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1],u1,0),u2,2),consts) :

>
bcs := {bc1,bc2,bc3,bc4,bc5,bc6} : consts := convert([C1,C2,
C3,C4,C5,C6],set) : Csoln := map(simplify,solve(bcs,
consts)) :

```

```

> collect(Csoln[1], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2],
factor) : collect(Csoln[2], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2,
2], p1, p2], factor) : collect(Csoln[3], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2],
Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : collect(Csoln[4], [Ψ0[1,
1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) :
collect(Csoln[5], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1,
p2], factor) : collect(Csoln[6], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1],
Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) :

> fu1 := collect(subs(x_cm, f1), [u1, u2], distributed, factor) : fu2
:= collect(subs(x_cm, f2), [u1, u2], distributed, factor) : fu11
:= mtaylor(fu1, [u1, u2], 4) : fu21 := mtaylor(fu2, [u1, u2],
4) : nonlinu := matrix([fu11], [fu21]) : ODE_nonlinu
:= multiply(Ψ0, nonlinu) :

```

Selanjutnya diperoleh sistem udot yaitu sebagai berikut

```

> udot := evalm(multiply(B, u) + ODE_nonlinu);

```

Lampiran 2. Program Maple untuk Mencari $\Psi_{0,1,1}, \Psi_{0,1,2}, \Psi_{0,2,1}, \Psi_{0,2,2}, h_{1,11}(0), h_{1,12}(0), h_{1,22}(0), h_{2,11}(0), h_{2,12}(0), h_{2,22}(0), h_{1,11}(-1), h_{1,12}(-1), h_{1,22}(-1), h_{2,11}(-1), h_{2,12}(-1), h_{2,22}(-1)$ saat $\mu < 0$

Substitusikan $r = \chi = 0.1, S^* = \varepsilon = 0.2, I^* = \rho = 0.08, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.1, \gamma = 0.1, \tau_0 = 2.0842$, **dan** $\mu = -0.8842$

```
> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
> A0 := 1.2·matrix(2, 2, [[-0.1·0.2, 0], [0.08, -(0.1 + 0.1)]]);
> A1 := 1.2·matrix(2, 2, [[0, -0.2], [0, 0.2]]);
> ident := evalm(array(1..2, 1..2, identity));
> Delta := evalm(A0 + A1·exp(-lambda) - lambda·ident);
> char_eq := collect(det(Delta), lambda) :
> fsolve(char_eq, lambda, complex);
> eq_im := evalc(subs(lambda = -0.003599174267 + 0.1357834725I,
    char_eq)) : eq_Re := coeff(eq_im, I, 0) : eq_Im
    := coeff(eq_im, I, 1) :

> v := matrix([[v1], [v2]]) : Dv := subs(lambda = -0.003599174267
    + 0.1357834725I, evalm(multiply(Delta, v))) : v2res := v2
    = solve(Dv[1, 1], v2) :

> yy := map(evalc, subs(v2res, v1 = 1, evalm(exp((-0.003599174267
    + 0.1357834725I)·theta)·v))) : Phi := array(1..2, 1..2,
    [[coeff(yy[1, 1], I, 0), coeff(yy[1, 1], I, 1)], [coeff(yy[2, 1], I,
    0), coeff(yy[2, 1], I, 1)]]):

> u := matrix([[u1], [u2]]) : Phi_u := multiply(Phi, u) :
> B := matrix([[ -0.003599174267-0.1357834725I, [0.1357834725
    -0.003599174267]]);

>
> w := array(1..2) : wD := subs(lambda = -0.003599174267
    + 0.1357834725I, multiply(w, Delta)) : w2res := w[2]
    = solve(wD[1], w[2]) : yyy := map(evalc, subs(w2res, w[1]
    = 1, lambda = -0.003599174267 + 0.1357834725I, evalm(w·exp(
    -lambda·xi)))) : Psi_g := array(1..2, 1..2, [[coeff(yyy[1], I,
    0), coeff(yyy[2], I, 0)], [coeff(yyy[1], I, 1), coeff(yyy[2], I,
    1)]]):

> bilinear_form := proc(rowv, colv) local ptemp; ptemp := subs(xi
    = 0, theta = 0, innerprod(rowv, colv)) + int(subs(xi = sigma
    + 1, theta = sigma, innerprod(rowv, A1, colv)), sigma = -1..0);
    RETURN(ptemp) end;
```

```

> rowvec := array(1..2) : colvec := array(1..2) : produit
  := matrix(2, 2) :

> for I1 from 1 to 2 do for I2 from 1 to 2 do rowvec := row(Psi_g,
  I1); colvec := col(Phi, I2); produit[I1, I2]
  := eval(bilinear_form(rowvec, colvec)) : od:od:

> K := inverse(produit) :
> PPSi := map(simplify, multiply(K, Psi_g)) :
> Psi0 := matrix(2, 2) : Psi0_res := map(simplify, map(eval, subs(xi
  = 0, evalm(PPSi)))) : Psi0_vals := [Psi0[1, 1] = Psi0_res[1, 1],
  Psi0[1, 2] = Psi0_res[1, 2], Psi0[2, 1] = Psi0_res[2, 1], Psi0[2, 2]
  = Psi0_res[2, 2]] :

> h := matrix([[h1_11(theta)·u12 + h1_12(theta)·u1·u2
  + h1_22(theta)·u22], [h2_11(theta)·u12 + h2_12(theta)·u1
  ·u2 + h2_22(theta)·u22]]):

> x := matrix([[x1], [x2]]) : xt := matrix([[x1t], [x2t]]) : lin
  := evalm(multiply(A0, x) + multiply(A1, xt)) : f1 := 1.2·(-x1
  ·x2t - 0.1·x12) : f2 := 1.2·x1·x2t : nonlin := matrix([[f1],
  [f2]]) :

>
> Phiu0 := map(eval, subs(theta = 0, evalm(Phiu))) : Phiut
  := map(eval, subs(theta = -1, evalm(Phiu))) : x_ce := [x1
  = Phiu0[1, 1], x2 = Phiu0[2, 1], x1t = Phiut[1, 1], x2t = Phiut[2,
  1]] : h0 := map(eval, subs(theta = 0, evalm(h))) : ht
  := map(eval, subs(theta = -1, evalm(h))) : x_cm := [x1
  = Phiu0[1, 1] + h0[1, 1], x2 = Phiu0[2, 1] + h0[2, 1], x1t
  = Phiut[1, 1] + ht[1, 1], x2t = Phiut[2, 1] + ht[2, 1]] : x_h
  := [x1 = h0[1, 1], x2 = h0[2, 1], x1t = ht[1, 1], x2t = ht[2, 1]] :

> delhs := map(diff, h, theta) :
> dhdu := matrix([[diff(h[1, 1], u1), diff(h[1, 1], u2)], [diff(h[2, 1],
  u1), diff(h[2, 1], u2)]]):

> derhs := map(collect, map(expand, evalm(multiply(dhdu,
  multiply(B, u)) + multiply(Phi, multiply(Psi0, [subs(x_ce, f1),
  subs(x_ce, f2)])))) : [u1, u2], distributed, factor) :

> hdes := evalm(delhs - derhs) :
>
> de1 := coeff(coeff(hdes[1, 1], u12), u2, 0) : de2
  := coeff(coeff(hdes[1, 1], u1), u2) : de3
  := coeff(coeff(hdes[1, 1], u22), u1, 0) : de4
  := coeff(coeff(hdes[2, 1], u12), u2, 0) : de5
  := coeff(coeff(hdes[2, 1], u1), u2) : de6
  := coeff(coeff(hdes[2, 1], u22), u1, 0) :

```

```

> des := {de1, de2, de3, de4, de5, de6} : fns := {coeff(h[1, 1], u1^2),
coeff(coeff(h[1, 1], u1), u2), coeff(h[1, 1], u2^2), coeff(h[2,
1], u1^2), coeff(coeff(h[2, 1], u1), u2), coeff(h[2, 1], u2^2)} :

> temp := dsolve(des, fns) : changeC := [_C1 = C1, _C2 = C2, _C3
= C3, _C4 = C4, _C5 = C5, _C6 = C6] : hsoln
:= simplify(expand(evalc(subs(changeC, value(temp))))) :

>
h1 := collect(hsoln[1], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1,
p2], factor) : h2 := collect(hsoln[2], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2],
Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) : h3 := collect(hsoln[3],
[Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) : h4
:= collect(hsoln[4], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2],
p1, p2], factor) : h5 := collect(hsoln[5], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2],
Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) : h6 := collect(hsoln[6],
[Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) :

>
h11 := subs(Psi0_1,1 = 0.9929660302 Psi0_1,2 = 0.1734592269 Psi0_2,1 =
-0.02655139903 Psi0_2,2 = -1.410104649 h1) : h21
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9929660302 Psi0_1,2 = 0.1734592269 Psi0_2,1 =
-0.02655139903 Psi0_2,2 = -1.410104649 h2) : h31
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9929660302 Psi0_1,2 = 0.1734592269 Psi0_2,1 =
-0.02655139903 Psi0_2,2 = -1.410104649 h3) : h41
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9929660302 Psi0_1,2 = 0.1734592269 Psi0_2,1 =
-0.02655139903 Psi0_2,2 = -1.410104649 h4) : h51
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9929660302 Psi0_1,2 = 0.1734592269 Psi0_2,1 =
-0.02655139903 Psi0_2,2 = -1.410104649 h5) : h61
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9929660302 Psi0_1,2 = 0.1734592269 Psi0_2,1 =
-0.02655139903 Psi0_2,2 = -1.410104649 h6) :

> hsoln0 := simplify(eval(subs(theta = 0, hsoln))) : hsolnt
:= simplify(eval(subs(theta = -1, hsoln))) :

> bclhs := map(eval, subs(theta = 0, evalm(derhs))) : bcrhs
:= map(collect, evalm(subs(x_h, evalm(lin)) + subs(x_ce,
evalm(nonlin))), [u1, u2]) :

```

```

>
consts := [C1, C2, C3, C4, C5, C6] : bceq := subs(hsoln0, hsolnt,
evalm(bclhs - bcrhs)) : bc1 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1], u1, 2), u2, 0), consts) : bc2 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1], u1, 1), u2, 1), consts) : bc3 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1], u1, 0), u2, 2), consts) : bc4 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1], u1, 2), u2, 0), consts) : bc5 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1], u1, 1), u2, 1), consts) : bc6 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1], u1, 0), u2, 2), consts) :

>
bcs := {bc1, bc2, bc3, bc4, bc5, bc6} : consts := convert([C1, C2,
C3, C4, C5, C6], set) : Csoln := map(simplify, solve(bcs,
consts)) :

>
i1 := collect(Csoln[1], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1,
p2], factor) : i2 := collect(Csoln[2], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2],
Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : i3 := collect(Csoln[3],
[Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : i4
:= collect(Csoln[4], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2],
p1, p2], factor) : i5 := collect(Csoln[5], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2],
Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : i6 := collect(Csoln[6],
[Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) :

>
i11 := subs(Ψ01,1 = 0.9929660302 Ψ01,2 = 0.1734592269 Ψ02,1 =
-0.02655139903 Ψ02,2 = -1.410104649 i1) : i21 := subs(Ψ01,1
= 0.9929660302 Ψ01,2 = 0.1734592269 Ψ02,1 =
-0.02655139903 Ψ02,2 = -1.410104649 i2) : i31 := subs(Ψ01,1
= 0.9929660302 Ψ01,2 = 0.1734592269 Ψ02,1 =
-0.02655139903 Ψ02,2 = -1.410104649 i3) : i41 := subs(Ψ01,1
= 0.9929660302 Ψ01,2 = 0.1734592269 Ψ02,1 =
-0.02655139903 Ψ02,2 = -1.410104649 i4) : i51 := subs(Ψ01,1
= 0.9929660302 Ψ01,2 = 0.1734592269 Ψ02,1 =
-0.02655139903 Ψ02,2 = -1.410104649 i5) : i61 := subs(Ψ01,1
= 0.9929660302 Ψ01,2 = 0.1734592269 Ψ02,1 =
-0.02655139903 Ψ02,2 = -1.410104649 i6) :

>
h111 := subs(i11, i21, i31, i41, i51, i61, h11) : h211 := subs(i11,
i21, i31, i41, i51, i61, h21) : h311 := subs(i11, i21, i31, i41, i51,
i61, h31) : h411 := subs(i11, i21, i31, i41, i51, i61, h41) : h511
:= subs(i11, i21, i31, i41, i51, i61, h51) : h611 := subs(i11,
i21, i31, i41, i51, i61, h61) :

```



```

> h1111 := simplify(eval(subs(theta = 0, h111))); h2111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h211))); h3111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h311))); h4111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h411))); h5111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h511))); h6111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h611)));

> h11111 := simplify(eval(subs(theta = -1, h111))); h21111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h211))); h31111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h311))); h41111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h411))); h51111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h511))); h61111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h611)));

> fu1 := collect(subs(x_cm, f1), [u1, u2], distributed, factor) : fu2
:= collect(subs(x_cm, f2), [u1, u2], distributed, factor) : fu11
:= mtaylor(fu1, [u1, u2], 4) : fu21 := mtaylor(fu2, [u1, u2],
4) : nonlinu := matrix([ [fu11], [fu21] ]) : ODE_nonlinu
:= multiply(Psi0, nonlinu) :

> udot := evalm(multiply(B, u) + ODE_nonlinu) :

```

Lampiran 3. Program Maple untuk Mencari $\Psi_{0,1,1}, \Psi_{0,1,2}, \Psi_{0,2,1}, \Psi_{0,2,2}, h_{1,11}(0), h_{1,12}(0), h_{1,22}(0), h_{2,11}(0), h_{2,12}(0), h_{2,22}(0), h_{1,11}(-1), h_{1,12}(-1), h_{1,22}(-1), h_{2,11}(-1), h_{2,12}(-1), h_{2,22}(-1)$ saat $\mu > 0$

Substitusikan $r = \chi = 0.1, S^* = \varepsilon = 0.2, I^* = \rho = 0.08, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.1, \gamma = 0.1, \tau_0 = 2.0842$, **dan** $\mu = 0.4158$

```
> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
> A0 := 2.5·matrix(2, 2, [[-0.1·0.2, 0], [0.08, -(0.1 + 0.1)]]);
> A1 := 2.5·matrix(2, 2, [[0, -0.2], [0, 0.2]]);
> ident := evalm(array(1..2, 1..2, identity));
> Delta := evalm(A0 + A1·exp(-lambda) - lambda·ident);
> char_eq := collect(det(Delta), lambda) :
> fsolve(char_eq, lambda, complex);
> eq_im := evalc(subs(lambda=0.002603545397+ 0.2555983648I,
    char_eq)) : eq_Re := coeff(eq_im, I, 0) : eq_Im
    := coeff(eq_im, I, 1) :

> v := matrix([[v1], [v2]]) : Dv := subs(lambda=0.002603545397
    + 0.2555983648I, evalm(multiply(Delta, v))) : v2res := v2
    = solve(Dv[1, 1], v2) :

> yy := map(evalc, subs(v2res, v1 = 1, evalm(exp((0.002603545397
    + 0.2555983648I)·theta)·v))) : Phi := array(1..2, 1..2,
    [[coeff(yy[1, 1], I, 0), coeff(yy[1, 1], I, 1)], [coeff(yy[2, 1], I,
    0), coeff(yy[2, 1], I, 1)]] :

> u := matrix([[u1], [u2]]) : Phi_u := multiply(Phi, u) :
> B := matrix([[0.002603545397-0.2555983648I, [0.2555983648
    0.002603545397]]]);

>
> w := array(1..2) : wD := subs(lambda=0.002603545397
    + 0.2555983648I, multiply(w, Delta)) : w2res := w[2]
    = solve(wD[1], w[2]) : yyy := map(evalc, subs(w2res, w[1]
    = 1, lambda=0.002603545397+ 0.2555983648I, evalm(w·exp(
    -lambda·xi)))) : Psi_g := array(1..2, 1..2, [[coeff(yyy[1], I,
    1), coeff(yyy[2], I, 1)], [coeff(yyy[1], I, 0), coeff(yyy[2], I,
    0)]] :

> bilinear_form := proc(rowv, colv) local ptemp; ptemp := subs(xi
    = 0, theta = 0, innerprod(rowv, colv)) + int(subs(xi = sigma
    + 1, theta = sigma, innerprod(rowv, A1, colv)), sigma = -1..0);
    RETURN(ptemp) end;

> rowvec := array(1..2) : colvec := array(1..2) : produit
    := matrix(2, 2) :
```

```

> for I1 from 1 to 2 do for I2 from 1 to 2 do rowvec := row(Psi_g,
    I1); colvec := col(Phi, I2); produit[I1, I2]
    := eval(bilinear_form(rowvec, colvec)) :od:od:

> K := inverse(produit) :
> PPSi := map(simplify, multiply(K, Psi_g)) :
> Psi0 := matrix(2, 2) : Psi0_res := map(simplify, map(eval, subs(xi
    = 0, evalm(PPSi)))) : Psi0_vals := [Psi0[1, 1] = Psi0_res[1, 1],
    Psi0[1, 2] = Psi0_res[1, 2], Psi0[2, 1] = Psi0_res[2, 1], Psi0[2, 2]
    = Psi0_res[2, 2]]:

> h := matrix([[h1_I1(theta)·u12 + h1_I2(theta)·u1·u2
    + h1_I22(theta)·u22], [h2_I1(theta)·u12 + h2_I2(theta)·u1
    ·u2 + h2_I22(theta)·u22]]):

> x := matrix([[x1], [x2]]) : xt := matrix([[x1t], [x2t]]) : lin
    := evalm(multiply(A0, x) + multiply(A1, xt)) : f1 := 2.5·(-x1
    ·x2t - 0.1·x12) : f2 := 2.5·x1·x2t : nonlin := matrix([[f1],
    [f2]]):

> Phiu0 := map(eval, subs(theta = 0, evalm(Phiu))) : Phiut
    := map(eval, subs(theta = -1, evalm(Phiu))) : x_ce := [x1
    = Phiu0[1, 1], x2 = Phiu0[2, 1], x1t = Phiut[1, 1], x2t = Phiut[2,
    1]] : h0 := map(eval, subs(theta = 0, evalm(h))) : ht
    := map(eval, subs(theta = -1, evalm(h))) : x_cm := [x1
    = Phiu0[1, 1] + h0[1, 1], x2 = Phiu0[2, 1] + h0[2, 1], x1t
    = Phiut[1, 1] + ht[1, 1], x2t = Phiut[2, 1] + ht[2, 1]] : x_h
    := [x1 = h0[1, 1], x2 = h0[2, 1], x1t = ht[1, 1], x2t = ht[2, 1]] :

> delhs := map(diff, h, theta) :
> dhdu := matrix([[diff(h[1, 1], u1), diff(h[1, 1], u2)], [diff(h[2, 1],
    u1), diff(h[2, 1], u2)]]):

> derhs := map(collect, map(expand, evalm(multiply(dhdu,
    multiply(B, u)) + multiply(Phi, multiply(Psi0, [subs(x_ce, f1),
    subs(x_ce, f2)])))) : [u1, u2], distributed, factor) :

> hdes := evalm(delhs - derhs) :
>
> de1 := coeff(coeff(hdes[1, 1], u12), u2, 0) : de2
    := coeff(coeff(hdes[1, 1], u1), u2) : de3
    := coeff(coeff(hdes[1, 1], u22), u1, 0) : de4
    := coeff(coeff(hdes[2, 1], u12), u2, 0) : de5
    := coeff(coeff(hdes[2, 1], u1), u2) : de6
    := coeff(coeff(hdes[2, 1], u22), u1, 0) :

```

```

> des := {de1, de2, de3, de4, de5, de6} : fns := {coeff(h[1, 1], u1^2),
coeff(coeff(h[1, 1], u1), u2), coeff(h[1, 1], u2^2), coeff(h[2,
1], u1^2), coeff(coeff(h[2, 1], u1), u2), coeff(h[2, 1], u2^2)} :

> temp := dsolve(des, fns) : changeC := [_C1 = C1, _C2 = C2, _C3
= C3, _C4 = C4, _C5 = C5, _C6 = C6] : hsoln
:= simplify(expand(evalc(subs(changeC, value(temp))))) :

>
h1 := collect(hsoln[1], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1,
p2], factor) : h2 := collect(hsoln[2], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2],
Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) : h3 := collect(hsoln[3],
[Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) : h4
:= collect(hsoln[4], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2],
p1, p2], factor) : h5 := collect(hsoln[5], [Psi0[1, 1], Psi0[1, 2],
Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) : h6 := collect(hsoln[6],
[Psi0[1, 1], Psi0[1, 2], Psi0[2, 1], Psi0[2, 2], p1, p2], factor) :

>
h11 := subs(Psi0_1,1 = 0.9800821269 Psi0_1,2 = 0.2693701175 Psi0_2,1
= 0.009069810988 Psi0_2,2 = -1.250151424 h1) : h21
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9800821269 Psi0_1,2 = 0.2693701175 Psi0_2,1
= 0.009069810988 Psi0_2,2 = -1.250151424 h2) : h31
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9800821269 Psi0_1,2 = 0.2693701175 Psi0_2,1
= 0.009069810988 Psi0_2,2 = -1.250151424 h3) : h41
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9800821269 Psi0_1,2 = 0.2693701175 Psi0_2,1
= 0.009069810988 Psi0_2,2 = -1.250151424 h4) : h51
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9800821269 Psi0_1,2 = 0.2693701175 Psi0_2,1
= 0.009069810988 Psi0_2,2 = -1.250151424 h5) : h61
:= subs(Psi0_1,1 = 0.9800821269 Psi0_1,2 = 0.2693701175 Psi0_2,1
= 0.009069810988 Psi0_2,2 = -1.250151424 h6) :

> hsoln0 := simplify(eval(subs(theta = 0, hsoln))) : hsolnt
:= simplify(eval(subs(theta = -1, hsoln))) :

> bclhs := map(eval, subs(theta = 0, evalm(derhs))) : bcrhs
:= map(collect, evalm(subs(x_h, evalm(lin)) + subs(x_ce,
evalm(nonlin))), [u1, u2]) :

```

```

>
consts := [C1, C2, C3, C4, C5, C6] : bceq := subs(hsoln0, hsolnt,
evalm(bclhs - bcrhs)) : bc1 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1], u1, 2), u2, 0), consts) : bc2 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1], u1, 1), u2, 1), consts) : bc3 := collect(coeff(coeff(bceq[1,
1], u1, 0), u2, 2), consts) : bc4 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1], u1, 2), u2, 0), consts) : bc5 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1], u1, 1), u2, 1), consts) : bc6 := collect(coeff(coeff(bceq[2,
1], u1, 0), u2, 2), consts) :

>
bcs := {bc1, bc2, bc3, bc4, bc5, bc6} : consts := convert([C1, C2,
C3, C4, C5, C6], set) : Csoln := map(simplify, solve(bcs,
consts)) :

>
i1 := collect(Csoln[1], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1,
p2], factor) : i2 := collect(Csoln[2], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2],
Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : i3 := collect(Csoln[3],
[Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : i4
:= collect(Csoln[4], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2],
p1, p2], factor) : i5 := collect(Csoln[5], [Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2],
Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) : i6 := collect(Csoln[6],
[Ψ0[1, 1], Ψ0[1, 2], Ψ0[2, 1], Ψ0[2, 2], p1, p2], factor) :

>
i11 := subs(Ψ01,1 = 0.9800821269 Ψ01,2 = 0.2693701175 Ψ02,1
= 0.009069810988 Ψ02,2 = -1.250151424 i1) : i21
:= subs(Ψ01,1 = 0.9800821269 Ψ01,2 = 0.2693701175 Ψ02,1
= 0.009069810988 Ψ02,2 = -1.250151424 i2) : i31
:= subs(Ψ01,1 = 0.9800821269 Ψ01,2 = 0.2693701175 Ψ02,1
= 0.009069810988 Ψ02,2 = -1.250151424 i3) : i41
:= subs(Ψ01,1 = 0.9800821269 Ψ01,2 = 0.2693701175 Ψ02,1
= 0.009069810988 Ψ02,2 = -1.250151424 i4) : i51
:= subs(Ψ01,1 = 0.9800821269 Ψ01,2 = 0.2693701175 Ψ02,1
= 0.009069810988 Ψ02,2 = -1.250151424 i5) : i61
:= subs(Ψ01,1 = 0.9800821269 Ψ01,2 = 0.2693701175 Ψ02,1
= 0.009069810988 Ψ02,2 = -1.250151424 i6) :

>
h111 := subs(i11, i21, i31, i41, i51, i61, h11) : h211 := subs(i11,
i21, i31, i41, i51, i61, h21) : h311 := subs(i11, i21, i31, i41, i51,
i61, h31) : h411 := subs(i11, i21, i31, i41, i51, i61, h41) : h511
:= subs(i11, i21, i31, i41, i51, i61, h51) : h611 := subs(i11,
i21, i31, i41, i51, i61, h61) :

```

```

> h1111 := simplify(eval(subs(theta = 0, h111))); h2111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h211))); h3111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h311))); h4111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h411))); h5111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h511))); h6111
:= simplify(eval(subs(theta = 0, h611)));

> h11111 := simplify(eval(subs(theta = -1, h111))); h21111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h211))); h31111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h311))); h41111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h411))); h51111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h511))); h61111
:= simplify(eval(subs(theta = -1, h611)));

> fu1 := collect(subs(x_cm, f1), [u1, u2], distributed, factor) : fu2
:= collect(subs(x_cm, f2), [u1, u2], distributed, factor) : fu11
:= mtaylor(fu1, [u1, u2], 4) : fu21 := mtaylor(fu2, [u1, u2],
4) : nonlinu := matrix([ [fu11], [fu21] ]) : ODE_nonlinu
:= multiply(Psi0, nonlinu) :

> udot := evalm(multiply(B, u) + ODE_nonlinu) :

```

Lampiran 4. Program Maple untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ saat $\tau < \tau_0$ dan saat $\tau > \tau_0$

```

> restart :
> with(alg) :
> with(plots) :
> with(DEtools) :
> udot := matrix([[

$$\eta u I - \chi u^2 + \Psi_{0,1} \left( \frac{\chi u^2 u I}{\epsilon} + \frac{\eta u I^2}{\epsilon} \right.$$


$$- \frac{1}{\epsilon} \left( (\chi h_{I,11}(0) \epsilon \tau_0 + \chi h_{I,11}(0) \epsilon \mu + h_{2,11}(-1) \epsilon \tau_0 + h_{2,11}(-1) \epsilon \mu \right.$$


$$- h_{I,11}(0) \eta) u I^3) + \frac{1}{\epsilon} \left( (-h_{2,22}(-1) \epsilon \tau_0 - h_{2,22}(-1) \epsilon \mu + h_{I,12}(0) \chi \right.$$


$$- h_{I,22}(0) \chi \epsilon \tau_0 - h_{I,22}(0) \chi \epsilon \mu + h_{I,22}(0) \eta) u I u^2) + \frac{1}{\epsilon} \left( \left( \right.$$


$$- \chi h_{I,12}(0) \epsilon \tau_0 - \chi h_{I,12}(0) \epsilon \mu + h_{I,11}(0) \chi - h_{2,12}(-1) \epsilon \tau_0 - h_{2,12}(-1) \epsilon \mu \right.$$


$$+ h_{I,12}(0) \eta) u I^2 u^2) + \frac{\chi h_{I,22}(0) u^2}{\epsilon} \left. \right) + \Psi_{0,2} \left( - \frac{\chi u^2 u I}{\epsilon} \right.$$


$$- \frac{(\chi \epsilon \tau_0 + \chi \epsilon \mu + \eta) u I^2}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \left( (-h_{2,11}(-1) \epsilon \mu - h_{2,11}(-1) \epsilon \tau_0 \right.$$


$$+ \chi h_{I,11}(0) \epsilon \tau_0 + \chi h_{I,11}(0) \epsilon \mu + h_{I,11}(0) \eta) u I^3) - \frac{1}{\epsilon} \left( (h_{I,22}(0) \chi \epsilon \tau_0 \right.$$


$$+ h_{I,22}(0) \eta - h_{2,22}(-1) \epsilon \tau_0 + h_{I,22}(0) \chi \epsilon \mu - h_{2,22}(-1) \epsilon \mu + h_{I,12}(0) \chi \right.$$


$$u I u^2) - \frac{1}{\epsilon} \left( (h_{I,11}(0) \chi - h_{2,12}(-1) \epsilon \mu - h_{2,12}(-1) \epsilon \tau_0 + \chi h_{I,12}(0) \epsilon \tau_0 \right.$$


$$+ \chi h_{I,12}(0) \epsilon \mu + h_{I,12}(0) \eta) u I^2 u^2) - \frac{\chi h_{I,22}(0) u^2}{\epsilon} \left. \right) \left[ \chi u I + \eta u^2 \right.$$


$$+ \Psi_{0,1} \left( \frac{\chi u^2 u I}{\epsilon} + \frac{\eta u I^2}{\epsilon} \right.$$


$$- \frac{1}{\epsilon} \left( (\chi h_{I,11}(0) \epsilon \tau_0 + \chi h_{I,11}(0) \epsilon \mu + h_{2,11}(-1) \epsilon \tau_0 + h_{2,11}(-1) \epsilon \mu \right.$$


$$- h_{I,11}(0) \eta) u I^3) + \frac{1}{\epsilon} \left( (-h_{2,22}(-1) \epsilon \tau_0 - h_{2,22}(-1) \epsilon \mu + h_{I,12}(0) \chi \right.$$


$$- h_{I,22}(0) \chi \epsilon \tau_0 - h_{I,22}(0) \chi \epsilon \mu + h_{I,22}(0) \eta) u I u^2) + \frac{1}{\epsilon} \left( \left( \right.$$


```

$$\begin{aligned}
& -\chi h1_12(0) e \tau_0 - \chi h1_12(0) e \mu + h1_11(0) x - h2_12(-1) e \tau_0 - h2_12(-1) e \mu \\
& + h1_12(0) \eta) u1^2 u2) + \frac{x h1_22(0) u2^3}{e} \Big) + \Psi0_{2,2} \Big(- \frac{x u2 u1}{e} \\
& - \frac{(\chi e \tau_0 + \chi e \mu + \eta) u1^2}{e} - \frac{1}{e} \Big((-h2_11(-1) e \mu - h2_11(-1) e \tau_0 \\
& + \chi h1_11(0) e \tau_0 + \chi h1_11(0) e \mu + h1_11(0) \eta) u1^3 \Big) - \frac{1}{e} \Big((h1_22(0) \chi e \tau_0 \\
& + h1_22(0) \eta - h2_22(-1) e \tau_0 + h1_22(0) \chi e \mu - h2_22(-1) e \mu + h1_12(0) x) \\
& u1 u2^2 \Big) - \frac{1}{e} \Big((h1_11(0) x - h2_12(-1) e \mu - h2_12(-1) e \tau_0 + \chi h1_12(0) e \tau_0 \\
& + \chi h1_12(0) e \mu + h1_12(0) \eta) u1^2 u2 \Big) - \frac{x h1_22(0) u2^3}{e} \Big) \Big) \Big) :
\end{aligned}$$

Misalkan $z = u1 + iu2$, maka $u1 = (z + \text{conjugate}(z))/2$, $u2 = (z - \text{conjugate}(z))/2i$ sehingga hasil transformasinya adalah

```

> Zdot2 := udot[1,1] + I*udot[2,1]:
> zdot1 := simplify(subs(u1 = (z + cz)/2, u2 = (z - cz)/(2*I), eval(Zdot2))) :
> zdot := mtaylor(zdot1, [z, cz], 4) :

```

Misalkan $z = w + h2(w, \text{conjugate}(w))$ dengan fungsi $h2$ dan $\text{conjugate}(h2)$ adalah

```

> h2 := a*w^2 + b*w*cw + c*cw^2 :
> ch2 := ca*cw^2 + cb*w*cw + cc*w^2 :

```

sehingga hasil transformasi yang kedua adalah

```

> zdotkanan := subs(z = w + h2, cz = cw + ch2, zdot) :
> zdotkini := collect(D(w + h2), D(w)) : subs(D(w) = wdot, D(cw) = (
- 1/8 * (8 I x e - 8 \eta e)/e) * cw + O(2), D(a) = 0, D(b) = 0, D(c) = 0, eval(zdotkini)) :
> nilaiwdot := mtaylor(1/(1 + b*cw + 2*a*w), [w, cw], 3) :
> wdot1 := mtaylor(nilaiwdot * (-b*w * ((- 1/8 * (8 I x e - 8 \eta e)/e) * cw) - 2*c * ((
- 1/8 * (8 I x e - 8 \eta e)/e) * cw) * cw + zdotkanan), [w, cw], 4) :

```

Pilih nilai a , b , dan c sehingga koefisien-koefisien dari w^2 , $w \cdot cw$, dan cw^2 bernilai 0, maka

```

> koefw2 := coeff(coeff(wdot1, w, 2), cw, 0) :
> a1 := coeff(koefw2, a, 0) : a2 := coeff(koefw2, a, 1) :
> koefw2 := simplify(subs(a = -a1/a2, eval(koefw2))) :

```



```

> coeffw1 := coeff(coeff(wdot1, w, 1), cw, 1) :
> b1 := coeff(coeffw1, b, 0) : b2 := coeff(coeffw1, b, 1) :
> coeffw1 := simplify(subs(b = - $\frac{b1}{b2}$ , eval(coeffw1))) :
> coeffw2 := coeff(coeff(wdot1, w, 0), cw, 2) :
> c1 := coeff(coeffw2, c, 0) : c2 := coeff(coeffw2, c, 1) :
> coeffw2 := simplify(subs(c = - $\frac{c1}{c2}$ , eval(coeffw2))) :
> coeffw3 := coeff(coeff(wdot1, w, 3), cw, 0) :
> coeffw3 := simplify(subs(cc = - $\frac{1}{\frac{1}{4} \frac{-8Ix e - 8\eta e}{e} - \frac{1}{8} \frac{-8\eta e + 8Ix e}{e} \left( -\frac{1}{8} \frac{1}{e} (2\Psi_{1,2}^0 \chi e \mu + 2\Psi_{2,1}^0 x + 2I\Psi_{2,1}^0 \eta - 2\Psi_{1,1}^0 \eta - 2I\Psi_{1,2}^0 x + 2I\Psi_{1,1}^0 x + 2\Psi_{1,2}^0 \chi e \tau_0 + 2\Psi_{1,2}^0 \eta - 2I\Psi_{2,2}^0 \eta - 2I\Psi_{2,2}^0 \chi e \tau_0 - 2\Psi_{2,2}^0 x - 2I\Psi_{2,2}^0 \chi e \mu) \right)}$ , a = - $\frac{a1}{a2}$ , eval(coeffw3))) :
> coeffw2cw := coeff(coeff(wdot1, w, 2), cw, 1) :
> coeffw2cw := simplify(subs(cc = - $\frac{1}{\frac{1}{4} \frac{-8Ix e - 8\eta e}{e} - \frac{1}{8} \frac{-8\eta e + 8Ix e}{e} \left( -\frac{1}{8} \frac{1}{e} (2\Psi_{1,2}^0 \chi e \mu + 2\Psi_{2,1}^0 x + 2I\Psi_{2,1}^0 \eta - 2\Psi_{1,1}^0 \eta - 2I\Psi_{1,2}^0 x + 2I\Psi_{1,1}^0 x + 2\Psi_{1,2}^0 \chi e \tau_0 + 2\Psi_{1,2}^0 \eta - 2I\Psi_{2,2}^0 \eta - 2I\Psi_{2,2}^0 \chi e \tau_0 - 2\Psi_{2,2}^0 x - 2I\Psi_{2,2}^0 \chi e \mu) \right)}$ , a = - $\frac{a1}{a2}$ , b = - $\frac{b1}{b2}$ , cb = - $\frac{1}{\frac{1}{8} \frac{-8Ix e - 8\eta e}{e} \left( -\frac{1}{8} \frac{1}{e} (4\Psi_{1,2}^0 \chi e \tau_0 - 4I\Psi_{2,2}^0 \eta - 4I\Psi_{2,2}^0 \chi e \tau_0 + 4I\Psi_{2,1}^0 \eta - 4\Psi_{1,1}^0 \eta - 4I\Psi_{2,2}^0 \chi e \mu + 4\Psi_{1,2}^0 \eta + 4\Psi_{1,2}^0 \chi e \mu) \right)}$ , eval(coeffw2cw))) :
> coeffw2 := coeff(coeff(wdot1, w, 1), cw, 2) :

```

```

> koefw2 := simplify ( subs ( c = -  $\frac{cl}{c^2}$ , a = -  $\frac{al}{a^2}$ , ca = -  $\frac{1}{\frac{1}{8} \frac{-8 \eta e + 8 I x e}{e}}$  (
-  $\frac{1}{8} \frac{1}{e} (2 \Psi_{1,2} \chi e \tau_0 + 2 I \Psi_{2,1} \eta + 2 \Psi_{2,2} x + 2 I \Psi_{1,2} x - 2 \Psi_{1,1} \eta - 2 I \Psi_{1,1} x$ 
-  $2 I \Psi_{2,2} \eta + 2 \Psi_{1,2} \eta - 2 I \Psi_{2,2} \chi e \tau_0 - 2 I \Psi_{2,2} \chi e \mu + 2 \Psi_{1,2} \chi e \mu - 2 \Psi_{2,1} x)$  ),
b = -  $\frac{bl}{b^2}$ , cb = -  $\frac{1}{\frac{1}{8} \frac{-8 I x e - 8 \eta e}{e}}$  ( -  $\frac{1}{8} \frac{1}{e} (4 \Psi_{1,2} \chi e \tau_0 - 4 I \Psi_{2,2} \eta$ 
-  $4 I \Psi_{2,2} \chi e \tau_0 + 4 I \Psi_{2,1} \eta - 4 \Psi_{1,1} \eta - 4 I \Psi_{2,2} \chi e \mu + 4 \Psi_{1,2} \eta + 4 \Psi_{1,2} \chi e \mu)$ 
), eval(koefw2) ) ) :
> koefw3 := coeff (coeff (wdot1, w, 0), cw, 3) :
> koefw3 := simplify ( subs ( c = -  $\frac{cl}{c^2}$ , ca = -  $\frac{1}{\frac{1}{8} \frac{-8 \eta e + 8 I x e}{e}}$  ( -  $\frac{1}{8} \frac{1}{e} (2 \Psi_{1,2} \chi e \tau_0$ 
+  $2 I \Psi_{2,1} \eta + 2 \Psi_{2,2} x + 2 I \Psi_{1,2} x - 2 \Psi_{1,1} \eta - 2 I \Psi_{1,1} x - 2 I \Psi_{2,2} \eta + 2 \Psi_{1,2} \eta$ 
-  $2 I \Psi_{2,2} \chi e \tau_0 - 2 I \Psi_{2,2} \chi e \mu + 2 \Psi_{1,2} \chi e \mu - 2 \Psi_{2,1} x)$  ), b = -  $\frac{bl}{b^2}$ ,
eval(koefw3) ) ) :
> wdot := ( -  $\frac{1}{8} \frac{(-8 I x e - 8 \eta e)}{e}$  ) . w + koefw3 . w^3 + koefw2cw . cw . w^2 + koefw2 . cw^2 . w
+ koefw3 . cw^3 :

```

Misalkan $w = s + h3(s, \text{conjugate}(s))$ dengan fungsi $h3$ dan conjugate ($h3$) adalah

```

> h3 := d . s^3 + e . s^2 . cs + f . s . cs^2 + g . cs^3 :
> ch3 := cg . s^3 + cf . s^2 . cs + ce . s . cs^2 + cd . cs^3 :

```

sehingga hasil transformasi yang ketiga adalah

```

> wdotkanan := subs ( w = s + h3, cw = cs + ch3, wdot ) :
> wdotkiri := collect ( D ( s + h3 ), D ( s ) ) : subs ( D ( s ) = sdot, D ( cs ) = ( -  $\frac{1}{8} \frac{(8 I x e - 8 \eta e)}{e}$  )
. cs + O3, D ( d ) = 0, D ( e ) = 0, D ( f ) = 0, D ( g ) = 0, eval ( wdotkiri ) ) :

```

```

> nilai_sdot := mtaylor(1/(1+f*cs^2+2*e*s*cs+3*d*s^2), [s, cs], 3):
> sdot1 := mtaylor(nilai_sdot*(-2*f*s*((-1/8*(8*I*x*e-8*eta*e)/e)*cs)-cs-e*s^2*((-1/8*(8*I*x*e-8*eta*e)/e)*cs)-3*g*((-1/8*(8*I*x*e-8*eta*e)/e)*cs*cs^2+wdotkanan), [cs, s], 4):

```

Pilih nilai d, f , dan g sehingga koefisien-koefisien dari $s^3, s \cdot cs^2$, dan cs^3 bernilai 0. Karena variabel $s^2 \cdot cs$ saat $\mu=0$ koefisiennya tidak mengandung e maka koefisien dari $s^2 \cdot cs$ tidak dapat dihilangkan, sehingga dipilih $e=1$. Dengan demikian diperoleh

```

> coeffs3 := coeff(coeff(sdot1, s, 3), cs, 0):
> d1 := coeff(coeffs3, d, 0): d2 := coeff(coeffs3, d, 1):
> coeffs3 := simplify(subs(d=-d1/d2, eval(coeffs3))):
> coeffs2cs := coeff(coeff(sdot1, s, 2), cs, 1):
> coeffs2cs := simplify(eval(simplify(subs(e=1, eval(coeffs2cs))))) :
> coeffs2cs := coeff(coeff(sdot1, s, 1), cs, 2):
> f1 := coeff(coeffs2cs, f, 0): f2 := coeff(coeffs2cs, f, 1):
> coeffs2cs := simplify(subs(f=-f1/f2, eval(coeffs2cs))):
> coeffs3 := coeff(coeff(sdot1, s, 0), cs, 3):
> g1 := coeff(coeffs3, g, 0): g2 := coeff(coeffs3, g, 1):
> coeffs3 := simplify(subs(g=-g1/g2, eval(coeffs3))):
> sdot := -1/8*(-8*I*x*e-8*eta*e)/e*s+coeffs2cs*s^2*cs:

```

Jika persamaan $sdot$ diubah ke dalam bentuk polar, maka diperoleh

```

> recoeffs2cs := coeff(coeffs2cs, 1, 0):
> rdot := -1/8*(-8*eta*e)/e*r(t)+recoeffs2cs*r(t)^3:

```

r
 $rdot$ saat $\mu < 0$ maka diperoleh

```

> rdot1 := simplify(subs(Psi0_11=0.9929660302, Psi0_12=0.1734592269, Psi0_21=-0.02655139903, Psi0_22=-1.410104649, h1_11(0)=0.005753097, h1_12(0)=0.05107896500, h1_22(0)=0.001659766, h2_11(0)=-0.006269801, h2_12(0)=-0.05499772600, h2_22(0)=-0.001721004, h1_11(-1)=0.07886606030, h1_12(-1)=-0.4308594132, h1_22(-1)=-0.02592416121, h2_11(-1)=0.04389430859, h2_12(-1)=0.5116390323, h2_22(-1)=0.02878246855, x=0.1, tau0=2.0842, eta=-0.003599174267, x=0.1357834725, epsilon=0.2, mu=-0.8842, eval(rdot))):

```

r
 $rdot$ saat $\mu > 0$ maka diperoleh

```
> rdot2 := simplify(subs(Ψ0_1_1=0.9800821269, Ψ0_1_2=0.2693701175, Ψ0_2_1
=0.009069810988, Ψ0_2_2=-1.250151424, h1_11(0)=0.020062950, h1_12(0)
=0.1329166020, h1_22(0)=0.005917934, h2_11(0)=-0.023151328, h2_12(0)=
-0.1478926640, h2_22(0)=-0.005880721, h1_11(-1)=0.1792125132, h1_12(-1)=
-0.5131417546, h1_22(-1)=-0.05446701721, h2_11(-1)=0.07205503712, h2_12(
-1)=0.7392012672, h2_22(-1)=0.06729310920, χ=0.1, τα0=2.0842, η
=0.002603545397, x=0.2555983648, epsilon=0.2, mu=0.4158, eval(rdot))):
```

Solusi persamaan diferensial $rdot$ adalah

```
> pd := diff(r(t), t) = - 1/8 * (-8 η e / e) * r(t) + rekoefs2cs * (r(t))^3 :
> ubah := r(t) : rj := subs(dsolve(pd)[1], evalm(ubah)) :
> rr := subs(t=0, evalm(rj)) :
> CC := solve(rr=r0_C1) :
> r := subs(_C1=CC, eval(rj)) :
> sis := - 1/8 * (-8 η e / e) * k + rekoefs2cs * k^2 :
> sis1 := subs(Ψ0_1_1=0.9929660302, Ψ0_1_2=0.1734592269, Ψ0_2_1=-0.02655139903, Ψ0_2_2=
-1.410104649, h1_11(0)=0.005753097, h1_12(0)=0.05107896500, h1_22(0)=
0.001659766, h2_11(0)=-0.006269801, h2_12(0)=-0.05499772600, h2_22(0)=
-0.001721004, h1_11(-1)=0.07886606030, h1_12(-1)=-0.4308594132, h1_22(-1)=
-0.02592416121, h2_11(-1)=0.04389430859, h2_12(-1)=0.5116390323, h2_22(-1)=
0.02878246855, χ=0.1, τα0=2.0842, η=-0.003599174267, x=0.1357834725, epsilon
=0.2, mu=-0.8842, eval(sis)) :
```

Gambar solusi saat $mu < 0$ untuk pengambil beberapa nilai awal serta medan arahnya maka

```
> j1 := plot([subs(Ψ0_1_1=0.9929660302, Ψ0_1_2=0.1734592269, Ψ0_2_1=-0.02655139903,
Ψ0_2_2=-1.410104649, h1_11(0)=0.005753097, h1_12(0)=0.05107896500, h1_22(0)=
0.001659766, h2_11(0)=-0.006269801, h2_12(0)=-0.05499772600, h2_22(0)=
-0.001721004, h1_11(-1)=0.07886606030, h1_12(-1)=-0.4308594132, h1_22(-1)=
-0.02592416121, h2_11(-1)=0.04389430859, h2_12(-1)=0.5116390323, h2_22(-1)=
0.02878246855, χ=0.1, τα0=2.0842, η=-0.003599174267, x=0.1357834725, epsilon
=0.2, mu=-0.8842, r0=6, evalm(r)), t+180, t=0..35*Pi], coords=polar, color=red,
thickness=2) :
> j2 := plot([subs(Ψ0_1_1=0.9929660302, Ψ0_1_2=0.1734592269, Ψ0_2_1=-0.02655139903,
Ψ0_2_2=-1.410104649, h1_11(0)=0.005753097, h1_12(0)=0.05107896500, h1_22(0)=
0.001659766, h2_11(0)=-0.006269801, h2_12(0)=-0.05499772600, h2_22(0)=
```

```

-0.001721004, hI_11(-1) = 0.07886606030, hI_12(-1) = -0.4308594132, hI_22(-1) =
-0.02592416121, h2_11(-1) = 0.04389430859, h2_12(-1) = 0.5116390323, h2_22(-1)
= 0.02878246855,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = -0.003599174267$ ,  $\alpha = 0.1357834725$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = -0.8842$ ,  $r0 = 5.5$ , evalm(r)), t + 225, t = 0..35·Pi], coords = polar, color
= red, thickness = 2) :

> j3 := plot([subs( $\Psi0_{1,1} = 0.9929660302$ ,  $\Psi0_{1,2} = 0.1734592269$ ,  $\Psi0_{2,1} = -0.02655139903$ ,
 $\Psi0_{2,2} = -1.410104649$ , hI_11(0) = 0.005753097, hI_12(0) = 0.05107896500, hI_22(0)
= 0.001659766, h2_11(0) = -0.006269801, h2_12(0) = -0.05499772600, h2_22(0) =
-0.001721004, hI_11(-1) = 0.07886606030, hI_12(-1) = -0.4308594132, hI_22(-1) =
-0.02592416121, h2_11(-1) = 0.04389430859, h2_12(-1) = 0.5116390323, h2_22(-1)
= 0.02878246855,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = -0.003599174267$ ,  $\alpha = 0.1357834725$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = -0.8842$ ,  $r0 = 5.6$ , evalm(r)), t + 135, t = 0..35·Pi], coords = polar, color
= red, thickness = 2) :

> j4 := plot([subs( $\Psi0_{1,1} = 0.9929660302$ ,  $\Psi0_{1,2} = 0.1734592269$ ,  $\Psi0_{2,1} = -0.02655139903$ ,
 $\Psi0_{2,2} = -1.410104649$ , hI_11(0) = 0.005753097, hI_12(0) = 0.05107896500, hI_22(0)
= 0.001659766, h2_11(0) = -0.006269801, h2_12(0) = -0.05499772600, h2_22(0) =
-0.001721004, hI_11(-1) = 0.07886606030, hI_12(-1) = -0.4308594132, hI_22(-1) =
-0.02592416121, h2_11(-1) = 0.04389430859, h2_12(-1) = 0.5116390323, h2_22(-1)
= 0.02878246855,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = -0.003599174267$ ,  $\alpha = 0.1357834725$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = -0.8842$ ,  $r0 = 5.7$ , evalm(r)), t + 45, t = 0..35·Pi], coords = polar, color = red,
thickness = 2) :

> j5 := plot([subs( $\Psi0_{1,1} = 0.9929660302$ ,  $\Psi0_{1,2} = 0.1734592269$ ,  $\Psi0_{2,1} = -0.02655139903$ ,
 $\Psi0_{2,2} = -1.410104649$ , hI_11(0) = 0.005753097, hI_12(0) = 0.05107896500, hI_22(0)
= 0.001659766, h2_11(0) = -0.006269801, h2_12(0) = -0.05499772600, h2_22(0) =
-0.001721004, hI_11(-1) = 0.07886606030, hI_12(-1) = -0.4308594132, hI_22(-1) =
-0.02592416121, h2_11(-1) = 0.04389430859, h2_12(-1) = 0.5116390323, h2_22(-1)
= 0.02878246855,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = -0.003599174267$ ,  $\alpha = 0.1357834725$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = -0.8842$ ,  $r0 = 5.8$ , evalm(r)), t + 90, t = 0..35·Pi], coords = polar, color = red,
thickness = 2) :

> j6 := plot([subs( $\Psi0_{1,1} = 0.9929660302$ ,  $\Psi0_{1,2} = 0.1734592269$ ,  $\Psi0_{2,1} = -0.02655139903$ ,
 $\Psi0_{2,2} = -1.410104649$ , hI_11(0) = 0.005753097, hI_12(0) = 0.05107896500, hI_22(0)
= 0.001659766, h2_11(0) = -0.006269801, h2_12(0) = -0.05499772600, h2_22(0) =
-0.001721004, hI_11(-1) = 0.07886606030, hI_12(-1) = -0.4308594132, hI_22(-1) =

```

```
-0.02592416121, h2_I1(-1) = 0.04389430859, h2_I2(-1) = 0.5116390323, h2_I22(-1)
= 0.02878246855,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = -0.003599174267$ ,  $\alpha = 0.1357834725$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = -0.8842$ ,  $r_0 = 5.9$ , evalm(r)), t, t = 0..35·Pi], coords = polar, color = red,
thickness = 2) :
```

```
> fp := fieldplot([sis1, 1], k = 0..6, t = 0..20·Pi, coords = polar, arrows = slim, thickness = 1) :
> display(j1, j2, j3, j4, j5, j6, fp) :
```

Untuk r_{dot} saat $\mu > 0$ memiliki periodik orbit terjadi saat r sama dengan

```
> rbar := root(-0.002603545397, -0.5943829472, 2) :
> sis2 := subs( $\Psi_{0,1} = 0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2} = 0.2693701175$ ,  $\Psi_{2,1} = 0.009069810988$ ,  $\Psi_{2,2} =$ 
-1.250151424,  $hI_{I1}(0) = 0.020062950$ ,  $hI_{I2}(0) = 0.1329166020$ ,  $hI_{I22}(0)$ 
= 0.005917934,  $h2_{I1}(0) = -0.023151328$ ,  $h2_{I2}(0) = -0.1478926640$ ,  $h2_{I22}(0) =$ 
-0.005880721,  $hI_{I1}(-1) = 0.1792125132$ ,  $hI_{I2}(-1) = -0.5131417546$ ,  $hI_{I22}(-1) =$ 
-0.05446701721,  $h2_{I1}(-1) = 0.07205503712$ ,  $h2_{I2}(-1) = 0.7392012672$ ,  $h2_{I22}(-1)$ 
= 0.06729310920,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = 0.002603545397$ ,  $\alpha = 0.2555983648$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = 0.4158$ , eval(sis)) :
```

Gambar solusi saat $\mu > 0$ untuk pengambilan beberapa nilai awal serta medan arahnya maka

```
> d1 := plot([subs( $\Psi_{0,1} = 0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2} = 0.2693701175$ ,  $\Psi_{2,1} = 0.009069810988$ ,
 $\Psi_{2,2} = -1.250151424$ ,  $hI_{I1}(0) = 0.020062950$ ,  $hI_{I2}(0) = 0.1329166020$ ,  $hI_{I22}(0)$ 
= 0.005917934,  $h2_{I1}(0) = -0.023151328$ ,  $h2_{I2}(0) = -0.1478926640$ ,  $h2_{I22}(0) =$ 
-0.005880721,  $hI_{I1}(-1) = 0.1792125132$ ,  $hI_{I2}(-1) = -0.5131417546$ ,  $hI_{I22}(-1) =$ 
-0.05446701721,  $h2_{I1}(-1) = 0.07205503712$ ,  $h2_{I2}(-1) = 0.7392012672$ ,  $h2_{I22}(-1)$ 
= 0.06729310920,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = 0.002603545397$ ,  $\alpha = 0.2555983648$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = 0.4158$ ,  $r_0 = 0.001$ , evalm(r)), t, t = 0..4000·Pi], coords = polar, color = blue,
thickness = 3) :
```

```
> d2 := plot([subs( $\Psi_{0,1} = 0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2} = 0.2693701175$ ,  $\Psi_{2,1} = 0.009069810988$ ,
 $\Psi_{2,2} = -1.250151424$ ,  $hI_{I1}(0) = 0.020062950$ ,  $hI_{I2}(0) = 0.1329166020$ ,  $hI_{I22}(0)$ 
= 0.005917934,  $h2_{I1}(0) = -0.023151328$ ,  $h2_{I2}(0) = -0.1478926640$ ,  $h2_{I22}(0) =$ 
-0.005880721,  $hI_{I1}(-1) = 0.1792125132$ ,  $hI_{I2}(-1) = -0.5131417546$ ,  $hI_{I22}(-1) =$ 
-0.05446701721,  $h2_{I1}(-1) = 0.07205503712$ ,  $h2_{I2}(-1) = 0.7392012672$ ,  $h2_{I22}(-1)$ 
= 0.06729310920,  $\chi = 0.1$ ,  $\tau u_0 = 2.0842$ ,  $\eta = 0.002603545397$ ,  $\alpha = 0.2555983648$ , epsilon
= 0.2,  $\mu = 0.4158$ ,  $r_0 = 0.0001$ , evalm(r)), t, t = 0..4000·Pi], coords = polar, color
= blue, thickness = 3) :
```

```
> d3 := plot([subs( $\Psi_{0,1} = 0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2} = 0.2693701175$ ,  $\Psi_{2,1} = 0.009069810988$ ,
 $\Psi_{2,2} = -1.250151424$ ,  $hI_{I1}(0) = 0.020062950$ ,  $hI_{I2}(0) = 0.1329166020$ ,  $hI_{I22}(0)$ 
```

```
=0.005917934, h2_11(0)=-0.023151328, h2_12(0)=-0.1478926640, h2_22(0) =
-0.005880721, h1_11(-1)=0.1792125132, h1_12(-1)=-0.5131417546, h1_22(-1) =
-0.05446701721, h2_11(-1)=0.07205503712, h2_12(-1)=0.7392012672, h2_22(-1)
=0.06729310920,  $\chi=0.1$ ,  $\tau_0=2.0842$ ,  $\eta=0.002603545397$ ,  $\alpha=0.2555983648$ , epsilon
=0.2, mu=0.4158, r0=0.08, evalm(r)), t+90, t=0..150·Pi], coords=polar, color
=green, thickness=3):
```

```
> d4 := plot([subs( $\Psi_{0,1}=0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2}=0.2693701175$ ,  $\Psi_{0,1}=0.009069810988$ ,
 $\Psi_{0,2}=-1.250151424$ , h1_11(0)=0.020062950, h1_12(0)=0.1329166020, h1_22(0)
=0.005917934, h2_11(0)=-0.023151328, h2_12(0)=-0.1478926640, h2_22(0) =
-0.005880721, h1_11(-1)=0.1792125132, h1_12(-1)=-0.5131417546, h1_22(-1) =
-0.05446701721, h2_11(-1)=0.07205503712, h2_12(-1)=0.7392012672, h2_22(-1)
=0.06729310920,  $\chi=0.1$ ,  $\tau_0=2.0842$ ,  $\eta=0.002603545397$ ,  $\alpha=0.2555983648$ , epsilon
=0.2, mu=0.4158, r0=0.075, evalm(r)), t+135, t=0..150·Pi], coords=polar, color
=green, thickness=3):
```

```
> d5 := plot([subs( $\Psi_{0,1}=0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2}=0.2693701175$ ,  $\Psi_{0,1}=0.009069810988$ ,
 $\Psi_{0,2}=-1.250151424$ , h1_11(0)=0.020062950, h1_12(0)=0.1329166020, h1_22(0)
=0.005917934, h2_11(0)=-0.023151328, h2_12(0)=-0.1478926640, h2_22(0) =
-0.005880721, h1_11(-1)=0.1792125132, h1_12(-1)=-0.5131417546, h1_22(-1) =
-0.05446701721, h2_11(-1)=0.07205503712, h2_12(-1)=0.7392012672, h2_22(-1)
=0.06729310920,  $\chi=0.1$ ,  $\tau_0=2.0842$ ,  $\eta=0.002603545397$ ,  $\alpha=0.2555983648$ , epsilon
=0.2, mu=0.4158, r0=0.0015, evalm(r)), t+180, t=0..150·Pi], coords=polar, color
=blue, thickness=3):
```

```
> d6 := plot([subs( $\Psi_{0,1}=0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2}=0.2693701175$ ,  $\Psi_{0,1}=0.009069810988$ ,
 $\Psi_{0,2}=-1.250151424$ , h1_11(0)=0.020062950, h1_12(0)=0.1329166020, h1_22(0)
=0.005917934, h2_11(0)=-0.023151328, h2_12(0)=-0.1478926640, h2_22(0) =
-0.005880721, h1_11(-1)=0.1792125132, h1_12(-1)=-0.5131417546, h1_22(-1) =
-0.05446701721, h2_11(-1)=0.07205503712, h2_12(-1)=0.7392012672, h2_22(-1)
=0.06729310920,  $\chi=0.1$ ,  $\tau_0=2.0842$ ,  $\eta=0.002603545397$ ,  $\alpha=0.2555983648$ , epsilon
=0.2, mu=0.4158, r0=0.00001, evalm(r)), t, t=0..100·Pi], coords=polar, color
=blue, thickness=3):
```

```
> d7 := plot([subs( $\Psi_{0,1}=0.9800821269$ ,  $\Psi_{0,2}=0.2693701175$ ,  $\Psi_{0,1}=0.009069810988$ ,
 $\Psi_{0,2}=-1.250151424$ , h1_11(0)=0.020062950, h1_12(0)=0.1329166020, h1_22(0)
=0.005917934, h2_11(0)=-0.023151328, h2_12(0)=-0.1478926640, h2_22(0) =
```

```

-0.005880721, h1_11(-1) = 0.1792125132, h1_12(-1) = -0.5131417546, h1_22(-1) =
-0.05446701721, h2_11(-1) = 0.07205503712, h2_12(-1) = 0.7392012672, h2_22(-1)
= 0.06729310920,  $\chi$  = 0.1,  $\tau_0$  = 2.0842,  $\eta$  = 0.002603545397,  $\alpha$  = 0.2555983648, epsilon
= 0.2,  $\mu$  = 0.4158,  $r_0$  = 0.08, evalm(r)), t, t = 0 .. 150 * Pi], coords = polar, color = green,
thickness = 3) :
> fp1 := fieldplot([sis2, 1], k = 0 .. 0.08, t = 0 .. 2 * Pi, coords = polar, arrows = slim) :
> r1 := polarplot(rbar, thickness = 5, axes = none) :
> display(d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, r1, fp1) :

```


Lampiran 5. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit $E_1 = (1,0,0)$ untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

```
function ddex1
sol = dde23(@ddex1de,[2.5],@ddex1hist,[0,200]);
figure;
plot(sol.x,sol.y)
xlabel('t');
legend('S','I','R')
function s = ddex1hist(t)
s = [0.2,0.3,0.1];
function dydt = ddex1de(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
dydt = [-y(1)*ylag1(2)+0.1*y(1)-0.1*y(1)^2
y(1)*ylag1(2)-0.55*y(2)-0.55*y(2)
0.55*y(2)-0.1*y(3)];
```

Lampiran 6. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $1 < \mathcal{R}_0 \leq 3$

```
function ddex1
sol = dde23(@ddex1de, [2.5], @ddex1hist, [0, 2000]);
figure;
plot(sol.x, sol.y)
xlabel('t');
legend('S', 'I', 'R')
function s = ddex1hist(t)
s = [0.2, 0.3, 0.2];
function dydt = ddex1de(t, y, Z)
ylag1 = Z(:, 1);
dydt = [-y(1)*ylag1(2)+0.1*y(1)-0.1*y(1)^2
y(1)*ylag1(2)-0.1*y(2)-0.4*y(2)
0.4*y(2)-0.1*y(3)];
```

Lampiran 7. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ saat $\tau < \tau_0$

```
function ddex1
sol = dde23(@ddex1de, [1.2], @ddex1hist, [0, 2000]);
figure;
plot(sol.x, sol.y)
xlabel('t');
legend('S', 'I', 'R')
function s = ddex1hist(t)
s = [0.25, 0.04, 0.2];
function dydt = ddex1de(t, y, Z)
ylag1 = Z(:, 1);
dydt = [-y(1)*ylag1(2)+0.1*y(1)-0.1*y(1)^2
y(1)*ylag1(2)-0.1*y(2)-0.1*y(2)
0.1*y(2)-0.1*y(3)];
```

Lampiran 8. Program Matlab untuk Titik Ekuilibrium Endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ untuk $\mathcal{R}_0 > 3$ saat $\tau > \tau_0$

```
function ddex1
sol = dde23(@ddex1de,[2.5],@ddex1hist,[0,2000]);
figure;
plot(sol.x,sol.y)
xlabel('t');
legend('S','I','R')
function s = ddex1hist(t)
s = [0.2,0.3,0.1];
function dydt = ddex1de(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
dydt = [-y(1)*ylag1(2)+0.1*y(1)-0.1*y(1)^2
y(1)*ylag1(2)-0.1*y(2)-0.1*y(2)
0.1*y(2)-0.1*y(3)];
```